MODUL MATEMATIKA 2

(IND 124)

MODUL SESI 1

FUNGSI TRANSENDEN

DISUSUN OLEH

SEPTIAN RAHMAT ADNAN, S.Si.,M.Si

UNIVERSITAS ESA UNGGUL

2020

FUNGSI TRANSENDEN

Pokok Bahasan : **FUNGSI TRANSENDEN**
Sub Pokok Bahasan :

- Turunan dan Integral Fungsi Log
- Turunan dan integral Fungsi Ln

Tujuan Instruksional Umum :
Mahasiswa mampu memahami dan melaksanakan kontrak perkuliahan yang sudah disepakati, dan mahasiswa mampu menyelesaikan soal tentang fungsi logaritma dan fungsi ln dengan berbagai macam variasi soal.

Tujuan Instruksional Khusus :
Agar mahasiswa mampu menjelaskan dan dapat menyelesaikan masalah yang terkait dengan :

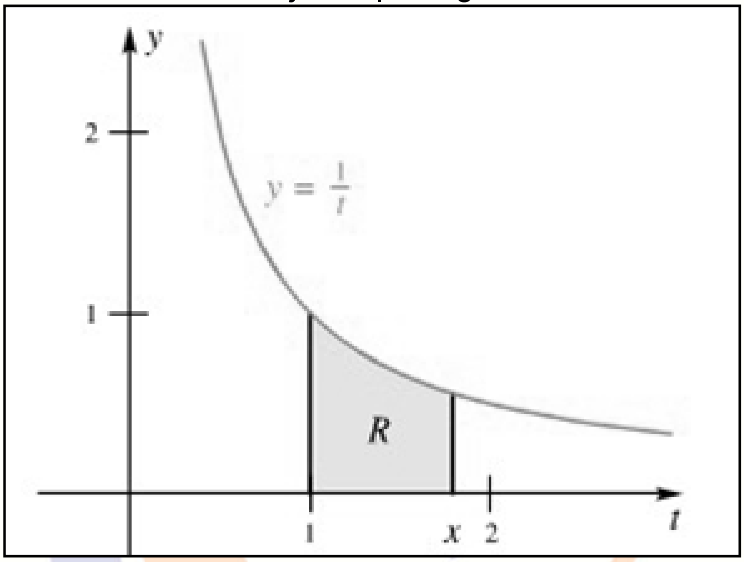
- Turunan Fungsi Log
- Turunan Fungsi Ln

FUNGSI TRANSENDEN

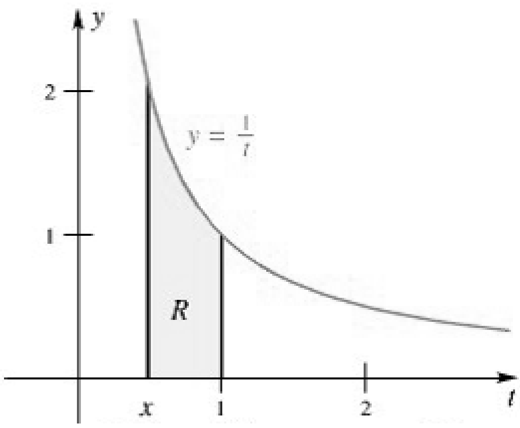
A. Fungsi Logaritma
Definisi : Fungsi Logaritma
adalah Suatu fungsi logaritma, dinyatakan pada suatu persamaan, yaitu :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

dengan x > 0 dan x bernilai positif. Jika hasil integral tersebut kita gambarkan pada suatu koordinat kartesian maka ditunjukan pada gambar berikut :



Dari gambar berikut dapat dilihat luasan dari area R dengan batas sumbu x dari x = 1 sampai dengan x = < 2, maka hasil integral dari fungsi y = 1/t merupakan luasan dibawah kurva y = 1/t.



Gambar 1. Fungsi saat 0 < x < 1, ln x = - luasan dari R

Dari gambar berikut dapat dilihat luasan dari area R dengan batas sumbu x dari x = 1 sampai dengan x = < 2, maka hasil integral dari fungsi y = 1/t merupakan luasan dibawah kurva y = 1/t.

$$d\int_1^x \frac{1}{x}dx = d(\ln x) = \frac{1}{x}$$

dengan x > 0 dan turunan pertama dari bentuk ln adalah sebagai berikut :

$$d(\ln u) = \frac{1}{u}du$$

Contoh 1.
Tentukan Turunan dari persamaan berikut :

$$d(\ln\sqrt{x})$$

untuk menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi. Dengan mensubtitusi :

$$u = \sqrt{x}$$

maka :

$$d(\ln\sqrt{x}) = \frac{1}{x^{1/2}}d(x^{1/2}) = \frac{1}{x^{1/2}}.\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x}$$

Contoh 2.
Tentukan Turunan dari persamaan berikut :

$$d(\ln(x^2 - x - 2))$$

untuk memdapatkan turunan dari soal ini, jika dianggap bahwa $x^2 - x - 2 > 0$, persamaan kuadrat tersebut dapat diakar-akarkan menjadi $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x - 1)$. Maka dari akar-akar tersebut didapatkan solusi x < -1 atau x > 2. dari hasiltersebut didapatkan solusi dari soal tersebut adalah

$$d(\ln(x^2 - x - 2)) = \frac{1}{x^2 - x - 2}d(x^2 - x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2}$$

Contoh 3.
tunjukan bahwa :

$$d(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

dengan $x \neq 0$
untuk dapat membuktikan turunan tersebut jika x > 0, maka :

$$|x| = x$$

dan

$$d(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

Jika x < 0 dan x = -x maka :

$$d(\ln|x|) = d(\ln - x) = \frac{1}{-x} d(-x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x}$$

maka untuk membuktikan hasil diferensiasi atau turunan tersebut kita lakukan integral terhadap hasil yang didapatkan

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

dengan x ≠ 0. dari hasil tersebut telah dapat dibuktikan.

Contoh 4.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int \frac{5}{2x+7} dx$$

untuk menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi. Dengan mensubtitusi : u = 2x + 7 maka du = 2 dx. Lalu kita dapatkan solusi :

$$\int \frac{5}{2x+7} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{2x+7} 2dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{5}{2} \ln|u| + C = \frac{5}{2} \ln|2x+7| + C$$

Contoh 5.
Tentukan solusi dari persamaan berikut

$$\int_{-1}^{5} \frac{x}{10-x^2} dx$$

untuk menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi. Dengan mensubtitusi : u = 10 – x^2 maka du = -2x dx. Lalu kita dapatkan solusi :

$$\int_{-1}^{5} \frac{x}{10-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{10-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|10-x^2| + C$$

Contoh 6.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int \frac{x^2 - x}{x+1} dx$$

untuk menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan perubahan persamaan menjadi :

$$\frac{x^2 - x}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

maka solusi dari persamaan tersebut didapatkan :

$$\int \frac{x^2 - x}{x+1} = \int (x-2)\, dx + 2\int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C$$

TEOREMA A
Jika a dan b adalah angka positif dan r adalah angka rasional, maka :

$1.\ \ln 1 = 0$

$2.\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$3.\ \ln ab = \ln a + \ln b$

$4.\ \ln a^r = r \ln a$

PEMBUKTIAN

$$1.\ln 1=\int_1^1 \frac{1}{t}dt=0$$

$$2.d(\ln ax)=\frac{1}{ax}.a=\frac{1}{x}$$ maka $$d(\ln x)=\frac{1}{x}$$

$$\ln ax=\ln x+C\rightarrow (x=1),(\ln a=C)$$

$$\ln ax=\ln x+\ln a$$

$$3.(a=1/b)\rightarrow \ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$$

$$4.(x>0)$$

$$d(\ln x')=\frac{1}{x^r}rx^{r-1}=\frac{r}{x}\Rightarrow d(r\ln x)=r.\frac{1}{x}=\frac{r}{x}$$

$$\Rightarrow \ln x^r=r\ln x+C$$

$$\Rightarrow (x=1,C=0)\Rightarrow \ln x^r=r\ln x$$

Contoh 7.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\frac{d\left(\ln\sqrt[3]{(x-1)/x^2}\right)}{dx},x>0$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan perubahan persamaan menjadi :

$$y=\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)^{1/3}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(x-1)-\ln x^2\right]=\frac{1}{3}\left[\ln(x-1)-2\ln x\right]$$

maka kita dapatkan solusi dari soal tersebut adalah :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}\right]=\frac{2-x}{3x\left(x-1\right)}$$

B. Diferensial/Turunan Logaritma

Seringkali pada beberapa kasus kalkulus dan aplikasi pada sehari-hari kita dapatkan fungsi logaritma dan untuk mendapatkan solusi atau mempelajari kasus tersebut harus didapatkan diferensiasi/turunan dari fungsi logaritma. Pada sub bab ini kita akan membahas diferensiasi atau turunan dari logaritma. Kta akan mencoba menyelesaikan beberapa contoh turunan dari fungsi logaritma sebagai berikut :

Contoh 8.

Tentukan turunan dari persamaan berikut :

$$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(x+1\right)^{2/3}}$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan perubahan persamaan menjadi pesamaan logaritma selanjutnya kita lakukan diferensiasi terhadap persamaan tersebut :

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-\frac{2}{3}\ln\left(x+1\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{2}{3\left(x+1\right)}=\frac{-(x+2)}{3(1-x^2)}$$

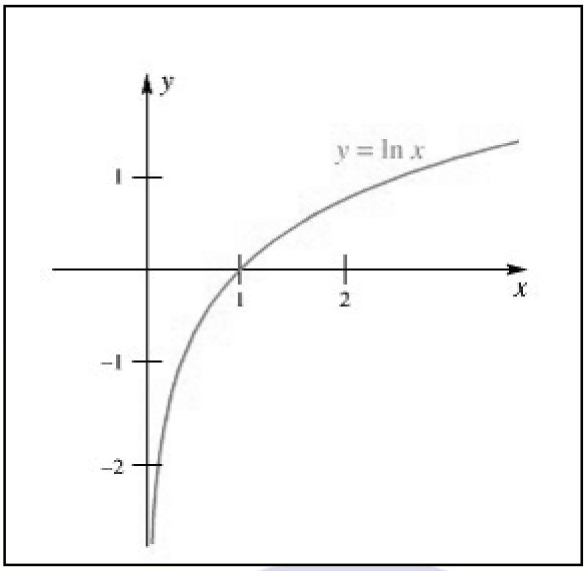
maka didapatkan :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y(x+2)}{3(1-x^2)}=\frac{-\sqrt{1-x^2}\,(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+2)}{3(x+1)^{2/3}(1-x^2)}$$

Grafik fungsi Logaritma

Pada fungsi logaritma jika kita plot/gambarkan fungsi y sebagai fungsi logaritma pada koordinat kartesian, maka grafik fungsi tersebut digambarkan seperti gambar di bawah ini :



Contoh 9.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int \tan x dx$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan perubahan persamaan menjadi lebih sederhana dengan aturan trigonometri :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

maka dengan aturan tersebut, bentuk integral soal beruba menjadi :

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x}(-\sin x) dx = -\ln|\cos x| + C$$

atau sama dengan :

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x|$$

Contoh 10.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int \sec x \csc x dx$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan perubahan persamaan menjadi lebih sederhana dengan aturan trigonometri :

$$\sec x \csc x = \tan x + \cot x$$

$$\int \sec x \csc x dx = \int (\tan x + \cot x)\, dx = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C$$

SUB BAB 3. Fungsi Invers dan Turunan Fungsi Invers

Pada beberapa kasus di kalkulus sering dijumpai untuk mendapatkan solusi dari suatu fungsi dilakukan invers. Pada sub bab ini kita akan membahas beberapa contoh serta aturan dari fungsi Invers dan turunan/diferensiasi dari fungsi tersebut.

Suatu fungsi invers biasanya dinotasikan dengan pangkat -1. sebagai contoh pada soal suatu fungsi x adalah f(x). Maka invers dari fungsi tersebut adalah $f(x)^{-1}$. Untuk lebih memahami fungsi invers dan turunan dari fungsi invers mari kita lihat beberapa contoh berikut :

Contoh 1.

Tunjukan bahwa $f(x) = x^5+2x+1$ memiliki invers

Solusi :

Kita turunkan fungsi tersebut menjadi $f'(x) = 5x^4+2 > 0$

Contoh 2.

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = 2x+6$

Solusi :

$$y = 2x + 6 \Rightarrow x = \frac{y-6}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-6}{2}$$

Jika kita coba jabarkan, maka :

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+6) = \frac{(2x+6)-6}{2} = x$$

$$f^{-1}(f(y)) = f\left(\frac{y-6}{2}\right) = 2\left(\frac{y-6}{2}\right) + 6 = y$$

SUB BAB 4. Eksponensial dan Fungsi Logaritma

Pada beberapa kasus di kalkulus sering dijumpai untuk mendapatkan solusi dari suatu eksponensial dan juga fungsi logaritma. Pada sub bab ini kita akan membahas beberapa contoh serta aturan dari eksponensial dan fungsi logaritma.

Definsi

Jika a > 0 dan x adalah angka real, maka :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

TEOREMA

Sifat dari a^x

$$1. a^x a^y = a^{x+y}$$

$$2. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3. \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$4. \left(ab\right)^x = a^x b^x$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

TEOREMA B

$$d(a^x)dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^x + C$$

dengan a ≠ 0
Contoh 1.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$d(3^{\sqrt{x}})$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi dengan aturan berantai sebagai berikut :

$$u = \sqrt{x}$$

maka kita dapatkan solusinya adalah

$$d(3^{\sqrt{x}}) = 3^{\sqrt{x}} \ln 3 . d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Contoh 2.
Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\frac{d\left(\left(x^4+2\right)^5 + 5^{x^4+2}\right)}{dx}$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(x^4+2\right)^4.4x^3 + 5^{x^4+2}\ln 5.4x^3$$

maka kita dapatkan solusinya adalah

$$= 4x^3\left[5\left(x^4+2\right)^4 + 5^{x^4+2}\ln 5\right]$$

$$= 20x^3\left[5\left(x^4+2\right)^4 + 5^{x^4+2}\ln 5\right]$$

Contoh 3.

Tentukan solusi dari persamaan berikut :

$$\int 2^{x^3} x^2 dx$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi dengan aturan berantai sebagai berikut :

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$

maka didapatkan :

$$\int 2^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int 2^{x^3}\left(3x^2 dx\right) = \frac{1}{3}\int 2^u du$$

Solusi dari soal tersebut adalah

$$= \frac{1}{3}\frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{3\ln 2} + C$$

Fungsi log$_a$

Definisi

Misalkan a adalah angka positif dan bukan 1, maka :

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Secara umum definisi tersebut dikenal sebagai “common Logarithms” yang biasa kita kenal sebagai fung Ln atau dapat kita tulis dengan fungsi sebagai berikut :

$$\log_e x = \ln x$$

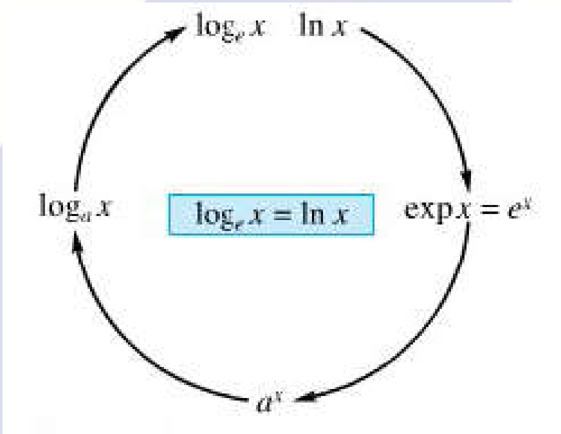
dan juga dari definisi tersebut didapatkan :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

maka dari definisi dan sifat fungsi log tersebut maka kita dapatkan turunan dari fungsil log adalah sebagai berikut :

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Maka kita dapatkan hubungan antara fungsi Log dan fungsi Ln seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini :



Contoh 4.
Tentukan turunan/diferensiasi dari persamaan berikut :

$$y = \log_{10}\left(x^4 + 13\right)$$

untuk mempermudah menyelesaikan soal tersebut, pertama-tama kita harus melakukan subtitusi dengan aturan berantai sebagai berikut :

$$u = x^4 + 13$$

maka kita dapatkan turunan dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(x^4 + 13\right)\ln 10} .4x^3 = \frac{4x^3}{\left(x^4 + 13\right)\ln 10}$$

DAFTAR PUSTAKA

- **Varberg, Purcell, Rigdon, ,KALKULUS, edisi kesembilan , Erlangga, Jakarta, 2011**
- **Murray R.Spieqel,CALCULUS LANJUT, edisi kedua, Erlangga, Jakarta, 2008.**