**BAB V**

**DERIVATIF PARSIAL**

**5.1.** **Fungsi dari dua variabel bebas**

Jika Z tertentu secara tunggal setiap titik ( x,y ) yang diberikan pada suatu daerah dari bidang X0Y, maka Z dinamakan fungsi dari x dan y, ditulis Z = F ( x,y ) dimana Z variabel tak bebas, x dan y variabel bebas.

Domain fungsi : himpunan semua nilai real ( x,y ) yang mungkin.

Range fungsi : himpunan semua nilai real Z yang mungkin.

Contoh : Z = √ 25 - x2 - y2

Domain fungsi : 25 - x2 - y2 ≥ 0 ;

semua titik dalam bidang X0Y pada lingkaran x2 + y2  = 25

dan didalam daerah lingkaran tersebut. Tampak bahwa 0 ≤ Z ≤ 5 , maka range fungsi : himpunan semua bilangan real dalam interval tertutup [ 0, 5 ]

Dalam ruang dimensi tiga, Z = F ( x,y ) dapat digambarkan sebagai suatu bidang lengkung.

Contoh : Gambarkan fungsi Z = 9 - x2 - y2

Z

(0,0,9) **Penyelesaian** : Kurva potongnya dengan

bidang-bidang // X0Y berupa lingkaran-lingkaran sedangkan kurva potongnya dengan bidang-bidang // X0Z dan Y0Z berupa parabola-parabola. Maka Z = 9 - x2 - y2  adalah parabolaida putar.

0 X

x2  + y2  = 9

z = 0

Y

5.2. Derivatif ( Turunan ) Parsial

Pandang fungsi z = F ( x,y ) , derivative parsial pertama dari z terhadap x ditulis :

= = ZX  = FX

dan didefinisikan sebagai berikut :

= Lim dengan memandang y konstan.

∆x 🡪 0

Derivatif parsial pertama dari Z terhadap Y ditulis :

= = ZY  = FY  dan didefinisikan sebagai berikut,

= Lim dengan memandang x konstan.

∆x 🡪 0

Contoh :

Z = X3  Y2  🡺 = 3X2  Y2  ; 2X3Y

5.3. Derivatif Parsial Tingkat Tinggi

Derivatif Parsial Tingkat Kedua :

= ( ) = ZXX  = FXX  ; = ( ) = ZYY  = FYY

= ( ) = ZXY  = FXY  ; = ( ) = ZYX  = F

Sifat : =

Bukti :

= Lim

∆x 🡪 0

= Lim

∆y 🡪 0  
Maka :

= Lim -

∆y 🡪 0

∆x 🡪 0

= Lim

∆y 🡪 0

∆x 🡪 0

= Lim -

∆x 🡪 0

∆y 🡪 0

= Lim

∆y 🡪 0

∆x 🡪 0

Tampak sisi kanan sama, berarti : =

Demikian juga dapat dibuktikan bahwa :

= = = ZYXX  = ZXYX  = ZXXY

Contoh : z = x3  + 4x2y - y3  , maka :

zx  = 3x2  + 8xy ; zxy  = 8x

zxx  = 6x + 8y zxy  = zyx  = 8x

zy  = 4x2  - 3y2  ; zyx  = 8x

zyy  = - 6y

5.4. Diferensial Total

Z

Z = F (x,y) disajikan dalam bentuk luasan ( bidang lengkung ) , titip P (x,y,z) suatu titik pada luasan itu. Jika x bertambah dengan ∆x dan y bertambah dengan ∆y , maka z akan bertambah dengan ∆z. Titik Q mempunyai koordinat (x + ∆x,y + ∆y,z + ∆z) terletak pada luasan itu.

Y

∆z = QE = BQ - BE = BQ - AP = F ( x + ∆x,y + ∆y ) - F (x,y)

RH // NE ; QE = EH + HQ ; EH = NR

Lim = merupakan gradient kurva PR.

∆x 🡪 0

maka = = + ε1

RN = ( + ε1 ) ∆x ; ε1  🡪 0 jika ∆x 🡪 0

Untuk ∆x 🡪 0 , maka kurva PS dapat diwakili oleh kurva QR, sehingga :

Lim = Lim =

∆x 🡪 0 ∆x 🡪 0

= = + ε2

QH = ( + ε2 ) ; ε2  🡪 0 jika 🡪 0 dan 🡪 0

= RN + QH = ( + ε1 ) + + ε2 )

Dalam keadaan limit maka :

dz = dx + dy yang disebut diferensial total dari z.

Perhatikan bahwa : = F ( x + + ) - F ( x,y )

F ( x + + ) = F ( x,y ) +

Pada perhitungan pendekatan , jika | | dan | | cukup kecil, maka ≈ dz , didapat :

F ( x + + ) = F ( x,y ) + dz

Contoh :

1) Diferensial total dari z = x3  - xy2  adalah :

dz = ( 3x2  - y2 ) dx - 2xy dy

2) Diberikan : F ( x,y ) = x2 y3

Dengan diferensial dapatkan nilai hampiran untuk ( 1.01 )2  ( 0.98 )3

Penyelesaian : untuk mendapatkan nilai F ( 1.01, 0.98 ) diambil x = 1 , y = 1 , = 0.01 dan = -0.02

F (1,1) = (1)2  (1)3 = 1

dz = dx + dy = 2xy3 dx + 3x2y2 dy

= 2 (1) (1)3 dx + 3 (1)2 (1)2 dy = 2dx + 3dy

Pasang dx = = 0.01 , dy = = - 0.02

dz = 2 (0.01) + 3 (- 0.02) = 0.02 - 0.06 = - 0.04

Jadi :

(1.01)2 (0.98)3 = F (1.01 , 0.98) = F (1,1) + dz

= 1 - 0.04 = 0.96

5.5. Diferensial Tingkat Tinggi

Jika z = F (x,y) maka diferensial total dari z adalah

dz = dx + dy ; ( dx dan dy konstan )

d2z = d (dz) = d ( dx + dy ) = d ( dx ) + d ( dy )

= d ( ) dx + d ( ) dy

d ( ) = ( ) dx + ( ) dy = dx + dy

d ( ) = ( ) dx + ( ) dy = dx + dy

Maka : d2z = (dx)2 + 2 dx dy + (dy)2

atau : d2z = ( dx + dy )2 z

Diferensial total tingkat n dari z = F (x,y) adalah :

dnz = ( dx + dy )n z

5.6. Derivatif Total

1) Z = F (x,y) , x = g (t) , y = h (t) ; maka Z fungsi dari t :

= +

Contoh : z = x2 + xy + y2 ; x = sin t , y = cos t . Ditanya :

Penyelesaian :

= + = (2x + y) cos t - (x + 2y) sin t

2) z = F ( x,y ) , y = h (x) ; maka z fungsi dari x :

= + = + .

= + = + .

Contoh : z = xy2 + x2y , y = Ln x . Ditanya : dan

Penyelesaian :

= + . = ( y2 + 2xy ) + ( 2xy + x2 ) . ( )

= + . = ( y2 + 2xy ) (x) + ( 2xy + x2 )

3) z = F ( x,y )

x = g ( r,s ) z fungsi dari r dan s

y = h ( r,s )

= . + . = zx  **.** xr + zy **.** yr

dan = . + . = zx  **.** xs + zy **.** ys

Contoh : z = x2 + xy + y2 ; x = 2r + s , y = r - 2s

Ditanya : dan

Penyel. : = 2x + y ; = x + 2y

= 2 ; = 1 ; = 1 , = -2

= zx **.** xr + zy **.** yr = ( 2x + y ) **.** 2 + ( x + 2y ) **.** 1 = 5x + 4y

= zx **.** xs + zy **.** ys = ( 2x + y ) **.** 1 + ( x + 2y ) **.** (-2) = -3y

5.7. Fungsi Homogin

Fungsi F (x,y) disebut fungsi homogin derajat n dalam x dan y , jika :

F ( λ x , λ y ) = λn F ( x,y ) ; λ sembarang konstanta

atau F ( x,y ) = xn f ( )

Contoh :

1) F ( x,y ) = x3 + 3x2y + y3 homogin derajat 3

2) F ( x,y ) = homogin derajat -3

3) F ( x,y ) = arc tg homogin derajat 0

Theorema Euler untuk fungsi homogin

Jika Z = F ( x,y ) fungsi homogin derajat n dalam x dan y , maka :

x + y = n z .

Bukti :

Pandang Z = F ( x,y ) = a1x α1y β1 + a2x α2y β2 + . . . + anx αny βn

Dimana : α 1 + β1 = α2 + β2 = . . . . = α n + βn = n

= a1 α1x α1-1  y β1  + a2 α2x α2-1  y β2 + . . . . + an αnx αn-1 y βn

= a1 β 1x α1y β1-1  + a2 β 2xα1  y β2-1 + . . . . + an βnx αn y βn-1

x + y = a1 α1x α1y β1 + a2  α2x α2y β2 + . . . . + an  αnx αny βn

+ a1 β 1x α1y β1  + a2 β 2x α2y β2 + . . . . + an βnx αny βn

= ( α1 + β1 ) α1x α1y β1  + ( α2 + β2 ) α2x α2y β2  + . . . . +

( αn + βn ) αnx αny βn

= n ( α1x α1y β1  + α2x α2y β2  + . . . . + αnx αny βn  )

= n z

**.** . **.**  x + y = n z ||

**5.8. Deret Taylor dari z = F ( x , y ) disekitar titik ( a , b ).**

Pandang z = F ( x , y ) fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu sampai dengan turunan tingkat n pada setiap titik ( x , y ) ditetangga titik ( a , b ).

Ambil : x = a + t ∆ x ,

y = b + t ∆ y ; dimana t suatu variabel bebas ,

Maka : z = F ( x , y ) = F ( a + t ∆ x , b + t ∆ y ) = G ( t ).

Deret Maclaurin dari z = G ( t ) adalah :

G ( t ) = G ( O ) + G’ ( O ) . t + G” ( 0 ) . t2 + G” ‘ ( 0 ) . t3  + . . . . . . . .

Pasang t = 1 , maka :

G ( t ) = G ( 0 ) + G’ ( 0 ) + + G” ( 0 ) + G” ‘ ( 0 ) + . . . . . . . . . ( 1 )

Karena dx = ∆ x dt , dy = ∆ y dt , maka :

dnz = ( dx + dy ) nF ( x , y )

= ( ( ∆ x dt ) + ( ∆ y dt ) nF ( x , y )

dnz = ( ∆ x + ∆ y ) nF ( x , y ) . ( dt )n

Sehingga :

= G (n) ( t ) = ( ∆ x + ∆ y )F ( x , y )

Untuk t = 0 maka x = a , y = b dan :

G (n) ( 0 ) = ( ∆ x + ∆ y )n  F ( x,y ) ; n = 0, 1, 2, . . . .

x=a

y=b

Perhatikan bahwa :

G ( 0 ) ( 0 ) = G ( 0 ) = F ( a,b )

G ( 1 ) ( 0 ) = ( ∆ x + ∆ y ) F ( x,y ) = ∆ xFx ( a,b ) + ∆ yFy (a,b)

x=a

y=b

G ( 2 ) ( 0 ) = ( ∆ x + ∆ y )2  F ( x,y )

x=a

y=b

= ( ∆ x )2 Fxx ( a,b ) + 2 ∆ x ∆ y Fxy ( a,b ) + ( ∆ y )2 Fyy ( a,b )

Untuk t = 1 maka G (1) = F ( a + ∆x , b + ∆y ) dan

∆x = x - a , ∆y = y - b ; sehingga (1) menjadi :

F ( a + ∆x , b + ∆y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

[ ( x-a )2 Fxx ( a,b ) + 2 ( x-a ) ( y-b ) Fxy ( a,b ) + ( y-b )2 Fyy ( a,b ) ] +

[ ( x-a )3 Fxxx ( a,b ) + 3 ( x-a )2 ( y-b ) Fxxy ( a,b ) +

3 ( x-a ) ( y-b )2 Fxyy ( a,b ) + ( y-b )3 Fyyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . .

Ini disebut deret Taylor dari z = F ( x,y ) disekitar titik ( a,b )

Deret Maclaurin dari z = F ( x , y ) adalah kejadian khusus dari deret Taylor diatas dimana a = b = 0

Ringkasnya sebagai berikut :

**DERET TAYLOR DARI Z = F ( x,y ) DISEKITAR TITIK ( a,b )** **:**

F ( x,y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

[ ( x-a )2 Fxx ( a,b ) + 2 ( x-a ) ( y-b ) Fxy ( a,b ) + ( y-b )2 Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . .

atau :

F ( x,y ) = [ ( x-a ) + ( y-b ) ]n  F ( a,b )

Jika x - a = h , y - b = k

F ( a + h , b + k ) = F ( a,b ) + hFx ( a,b ) + k Fy ( a,b ) +

[ h2Fxx ( a,b ) + 2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . atau :

F ( a+h , b+k ) = ( h + k )n  . F ( a,b )

DERET MACLAURIN DARI Z = F ( x,y )

F ( x,y ) = F ( 0,0 ) + x Fx ( 0,0 ) + y Fy ( 0,0 ) +

( x2Fxx  ( 0,0 ) + 2xy Fxy  ( 0,0 ) + y2Fyy  ( 0,0 ) + . . . . . . . .

Atau :

F ( x,y ) = ( x + y )n  F ( 0,0 )

Contoh :

1. Dapatkan ekspansi ( deret Taylor ) dari arc tg disekitar ( 1,1 ) cukup s/d suku-suku

derajat dua saja.

Penyelesaian :

F ( x,y ) = arc tg ; Fxx ( x,y ) = 2xy ( x2  + y2 )-2

Fx ( x,y ) = - ; Fxy ( x,y ) = ( y2  - x2 ) ( x2  + y2 )-2

Fy ( x,y ) = ; Fyy ( x,y ) = -2xy ( x2  + y2 )-2

Untuk x = 1 , y = 1 🡺

F ( 1,1 ) = arc tg 1 = ; Fx ( 1,1 ) = - , Fy ( 1,1 ) =

Fxx ( 1,1 ) = = ; Fxy ( 1,1 ) = 0 , Fyy ( 1,1 ) = = -

F ( x,y ) = F ( 1,1 ) + ( x-1 ) Fx ( 1,1 ) + ( y-a ) Fy ( 1,1 ) +

[ ( x-1 )2  Fxx ( 1,1 )+ 2( x-1 ) ( y-1 ) Fxy (1,1) + ( y-1)2 Fyy (1,1)

+ . . . . . . .

arc tg = - ( x-1 ) + ( y-1 ) + [ ( x-1 )2  - ( y-1 )2  ] + . . . . ..

2. Dapatkan deret Maclaurin dari F ( x,y ) = cos x cox y

cukup s/d suku-suku derajat dua saja.

Penyelesaian :

F ( x,y ) = cos x cos y ; Fxx ( x,y ) = - cos x cos y

Fx ( x,y ) = - sin x cos y ; Fxy  ( x,y ) = sin x sin y

Fy ( x,y ) = - cos x sin y ; Fyy ( x,y ) = - cos x cos y

Untuk x = 0 , y = 0 🡺

F ( 0,0 ) = 1 , Fx ( 0 , 0 ) = 0 , Fy ( 0,0 ) = 0 , Fxx ( 0,0 ) = -1 ,

Fxy ( 0,0 ) = 0 , Fyy ( 0,0 ) = - 1

F ( x,y ) = F (0,0) + xFx (0,0)+yFy (0,0) + ( x2 Fxx (0,0)+2xyFxy(0,0)+y2Fyy (0,0)

**.** . **.** cos x cos y = 1 - ( x2 + y2 ) + . . . .

**5.9. Nilai Ekstrem dari z = F ( x,y )**

Fungsi Z = F ( x,y ) mencapai maximum pada ( a,b ) jika untuk h << , k << ( baca : h dan k cukup kecil ) berlaku : F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) < 0

Fungsi z = F ( x,y ) mencapai minimum pada ( a,b ) jika untuk h << dan k << , berlaku

F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) > 0

Deret Taylor dari z = F ( x,y ) disekitar ( a,b ) adalah :

F ( x,y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

[( x-a )2 Fxx ( a,b )+2 (x-a) (y-b) Fxy ( a,b ) + (y-b)2 Fyy( a,b )]+ . . . . . . .

Jika x - a = h , y - b = k , maka :

F ( a+h , b+k ) = F ( a,b ) + hFx ( a,b ) + kFy ( a,b ) + [ h2Fxx ( a,b ) +

2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . . . . . ( 1 )

z = F ( x,y ) mencapai titik extrim pada ( a,b ) maka Fx ( a,b ) = 0

dan Fy ( a,b ) = 0 , sehingga ( 1 ) menjadi :

F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) = [ h2Fxx ( a,b ) + 2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ]

= . [ h2F2xx ( a,b ) + 2hkFxx ( a,b ) Fxy ( a,b ) + k2F2xy ( a,b )

+ k2Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) - k2F2xy ( a,b ) ]

= . [{ hFxx ( a,b ) + kFxy ( a,b ) }2  + k2 { Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) -F2xy ( a,b )}]

positif positif ∆

F ( a,b , b+k ) - F ( a,b ) = [ positif + positif . ∆ ]

Dst baca ringkasannya berikut :

Ringkasnya sebagai berikut

MAXIMUM & MINIMUM DARI Z = F ( x,y )

Titik-titik kritis ( calon-calon titik extrim ) :

= 0

misal ketemu x = a , y = b

= 0

∆ = Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) - F2xy ( a,b )

1) Jika ∆ > 0 & Fxx ( a,b ) < 0 🡺 Zmax  = F ( a,b )

( Fyy ( a,b ) < 0 )

2) Jika ∆ > 0 & Fxx ( a,b ) > 0 🡺 Zmin  = F ( a,b )

( Fyy ( a,b ) > 0 )

3) Jika ∆ < 0 🡺 ( a,b ) titik sadel (pelana)

4) Jika ∆ = 0 🡺pada ( a,b ) tidak ada keterangan

MAXIMUM DAN MINIMUM DENGAN SYARAT TAMBAHAN

Ekstrima dari z = f(x,y) dengan syarat tambahan : g(x,y) = 0

Dibentuk fungsi Lagrange :

F(x,y) = f(x,y) + λ g(x,y)

Fx= fx + λ gx = 0 Syarat supaya terjadi esktrim. Dari sini ketemu x,y,λ.

Fy= fy + λ gy = 0 λ disebut pengganda Langrage, (bebas dari x dan y)

g(x,y) = 0