**BAB V**

**DERIVATIF PARSIAL**

**5.1.** **Fungsi dari dua variabel bebas**

Jika Z tertentu secara tunggal setiap titik ( x,y ) yang diberikan pada suatu daerah dari bidang X0Y, maka Z dinamakan fungsi dari x dan y, ditulis Z = F ( x,y ) dimana Z variabel tak bebas, x dan y variabel bebas.

Domain fungsi : himpunan semua nilai real ( x,y ) yang mungkin.

Range fungsi : himpunan semua nilai real Z yang mungkin.

Contoh : Z = √ 25 - x2 - y2

Domain fungsi : 25 - x2 - y2 ≥ 0 ;

 semua titik dalam bidang X0Y pada lingkaran x2 + y2  = 25

 dan didalam daerah lingkaran tersebut. Tampak bahwa 0 ≤ Z ≤ 5 , maka range fungsi : himpunan semua bilangan real dalam interval tertutup [ 0, 5 ]

Dalam ruang dimensi tiga, Z = F ( x,y ) dapat digambarkan sebagai suatu bidang lengkung.

Contoh : Gambarkan fungsi Z = 9 - x2 - y2

 Z

 (0,0,9) **Penyelesaian** : Kurva potongnya dengan

bidang-bidang // X0Y berupa lingkaran-lingkaran sedangkan kurva potongnya dengan bidang-bidang // X0Z dan Y0Z berupa parabola-parabola. Maka Z = 9 - x2 - y2  adalah parabolaida putar.

 0 X

 x2  + y2  = 9

 z = 0

Y

5.2. Derivatif ( Turunan ) Parsial

Pandang fungsi z = F ( x,y ) , derivative parsial pertama dari z terhadap x ditulis :

$\frac{∂ z}{∂ x}$ = $\frac{∂ F}{∂ x}$ = ZX  = FX

dan didefinisikan sebagai berikut :

$\frac{∂ z}{∂ x}$ = Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y \right) - F ( x,y )}{∆ x}$ dengan memandang y konstan.

 ∆x 🡪 0

Derivatif parsial pertama dari Z terhadap Y ditulis :

$\frac{∂ z}{∂ y}$ = $\frac{∂ z}{∂ x}$ = ZY  = FY  dan didefinisikan sebagai berikut,

 $\frac{∂ z}{∂ x}$ = Lim $\frac{F \left( x,y + ∆ y \right) - F ( x,y )}{y}$ dengan memandang x konstan.

 ∆x 🡪 0

Contoh :

Z = X3  Y2  🡺 $\frac{∂ z}{∂ x}$ = 3X2  Y2  ; $\frac{∂ z}{∂ x}$ 2X3Y

5.3. Derivatif Parsial Tingkat Tinggi

Derivatif Parsial Tingkat Kedua :

$\frac{∂^{2} z}{∂ X^{2}}$ = $\frac{∂}{∂ x}$ ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) = ZXX  = FXX  ; $\frac{∂^{2} z}{∂ y^{2}}$ = $\frac{∂}{∂ y}$ ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) = ZYY  = FYY

$\frac{∂^{2} z}{∂y ∂x}$ = $\frac{∂}{∂ y}$ ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) = ZXY  = FXY  ; $\frac{∂^{2} z}{∂y ∂x}$ = $\frac{∂}{∂ x}$ ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) = ZYX  = F

Sifat : $\frac{∂^{2} z}{∂x ∂y}$ = $\frac{∂^{2} z}{∂y ∂x}$

Bukti :

 $\frac{∂ z}{∂ x}$ = Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y \right) - F ( x,y )}{∆ x}$

 ∆x 🡪 0

 $\frac{∂ z}{∂ y}$ = Lim $\frac{F \left( x,y + ∆ y \right) - F ( x,y )}{∆ y}$

 ∆y 🡪 0
Maka :

 $\frac{∂^{2} z}{∂x ∂y}$ = Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y + ∆y \right) - F ( x + ∆ x,y )}{∆ y}$ - $\frac{F \left( x,y + ∆ y \right) - F ( x,y )}{∆ y}$

 ∆y 🡪 0 $∆ x$

 ∆x 🡪 0

 = Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y + ∆y \right) - F \left( x + ∆ x,y \right) - F \left( x,y + ∆ y \right) + F ( x,y ) }{∆ x ∆ y}$

 ∆y 🡪 0

 ∆x 🡪 0

 $\frac{∂^{2} z}{∂y ∂x}$ = Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y + ∆y \right) - F ( x,y + ∆ y )}{∆ x}$ - $\frac{F \left( x + ∆ x,y \right) - F ( x,y )}{∆ x}$

 ∆x 🡪 0 $∆ y$

 ∆y 🡪 0

= Lim $\frac{F \left( x + ∆ x,y + ∆y \right) - F \left( x + ∆ x,y \right) - F \left( x,y + ∆ y \right) + F ( x,y ) }{∆ x ∆ y}$

 ∆y 🡪 0

 ∆x 🡪 0

Tampak sisi kanan sama, berarti : $\frac{∂^{2} z}{∂x ∂y}$ = $\frac{∂^{2} z}{∂y ∂x}$

Demikian juga dapat dibuktikan bahwa :

$\frac{∂^{3}z}{∂x^{2} ∂x}$ = $\frac{∂^{3}z}{ ∂x ∂y ∂x}$ = $\frac{∂^{3}z}{∂y ∂x^{2}}$ = ZYXX  = ZXYX  = ZXXY

Contoh : z = x3  + 4x2y - y3  , maka :

zx  = 3x2  + 8xy ; zxy  = 8x

zxx  = 6x + 8y zxy  = zyx  = 8x

zy  = 4x2  - 3y2  ; zyx  = 8x

zyy  = - 6y

5.4. Diferensial Total

 Z

Z = F (x,y) disajikan dalam bentuk luasan ( bidang lengkung ) , titip P (x,y,z) suatu titik pada luasan itu. Jika x bertambah dengan ∆x dan y bertambah dengan ∆y , maka z akan bertambah dengan ∆z. Titik Q mempunyai koordinat (x + ∆x,y + ∆y,z + ∆z) terletak pada luasan itu.

Y

∆z = QE = BQ - BE = BQ - AP = F ( x + ∆x,y + ∆y ) - F (x,y)

RH // NE ; QE = EH + HQ ; EH = NR

Lim $\frac{RN}{PN}$ = $\frac{∂ z}{∂ x}$ merupakan gradient kurva PR.

∆x 🡪 0

maka $\frac{RN}{PN}$ = $\frac{RN}{∆x}$ = $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε1

 RN = ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε1 ) ∆x ; ε1  🡪 0 jika ∆x 🡪 0

Untuk ∆x 🡪 0 , maka kurva PS dapat diwakili oleh kurva QR, sehingga :

Lim $\frac{SG}{PG}$ = Lim $\frac{QH}{RH}$ = $\frac{∂ z}{∂ x}$

∆x 🡪 0 ∆x 🡪 0

 $\frac{QH}{RH}$ = $\frac{QH}{∆y}$ = $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε2

 QH = ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε2 ) $∆y$ ; ε2  🡪 0 jika $∆x$ 🡪 0 dan $∆y$ 🡪 0

$∆z$ = RN + QH = ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε1 ) $∆x$ + $\frac{∂ z}{∂ x}$ + ε2 ) $∆y$

Dalam keadaan limit maka :

 dz = $\frac{∂ z}{∂ x}$ dx + $\frac{∂ z}{∂ y}$ dy yang disebut diferensial total dari z.

Perhatikan bahwa : $∆Z$ = F ( x + $∆x,y$ + $∆y$ ) - F ( x,y )

 F ( x + $∆x,y$ + $∆y$ ) = F ( x,y ) + $∆z$

Pada perhitungan pendekatan , jika | $∆x$ | dan | $∆y$ | cukup kecil, maka $∆z$ ≈ dz , didapat :

 F ( x + $∆x,y$ + $∆y$ ) = F ( x,y ) + dz

Contoh :

1) Diferensial total dari z = x3  - xy2  adalah :

 dz = ( 3x2  - y2 ) dx - 2xy dy

2) Diberikan : F ( x,y ) = x2 y3

 Dengan diferensial dapatkan nilai hampiran untuk ( 1.01 )2  ( 0.98 )3

Penyelesaian : untuk mendapatkan nilai F ( 1.01, 0.98 ) diambil x = 1 , y = 1 , $∆x$ = 0.01 dan $∆y$ = -0.02

F (1,1) = (1)2  (1)3 = 1

dz = $\frac{∂ z}{∂ x}$ dx + $\frac{∂ z}{∂ x}$ dy = 2xy3 dx + 3x2y2 dy

 = 2 (1) (1)3 dx + 3 (1)2 (1)2 dy = 2dx + 3dy

Pasang dx = $∆x$ = 0.01 , dy = $∆y$ = - 0.02

dz = 2 (0.01) + 3 (- 0.02) = 0.02 - 0.06 = - 0.04

Jadi :

(1.01)2 (0.98)3 = F (1.01 , 0.98) = F (1,1) + dz

 = 1 - 0.04 = 0.96

5.5. Diferensial Tingkat Tinggi

Jika z = F (x,y) maka diferensial total dari z adalah

dz = $\frac{∂ z}{∂ x}$ dx + $\frac{∂ z}{∂ y}$ dy ; ( dx dan dy konstan )

d2z = d (dz) = d ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ dx + $\frac{∂ z}{∂ y}$ dy ) = d ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ dx ) + d ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ dy )

 = d ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) dx + d ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) dy

d ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) = $\frac{∂}{∂ x}$ ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) dx + $\frac{∂}{∂ y}$ ( $\frac{∂ z}{∂ x}$ ) dy = $\frac{∂^{2}z}{∂x^{2}}$ dx + $\frac{∂^{2}z}{∂x ∂y}$ dy

d ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) = $\frac{∂}{∂ x}$ ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) dx + $\frac{∂}{∂ y}$ ( $\frac{∂ z}{∂ y}$ ) dy = $\frac{∂^{2}z}{∂x ∂y}$ dx + $\frac{∂^{2}z}{∂y^{2}}$ dy

Maka : d2z = $\frac{∂^{2}z}{∂x^{2}}$ (dx)2 + 2 $\frac{∂^{2}z}{∂x ∂y}$ dx dy + $\frac{∂^{2}z}{∂y^{2}}$ (dy)2

atau : d2z = ( $\frac{∂}{∂ x}$ dx + $\frac{∂}{∂ y}$ dy )2 z

 Diferensial total tingkat n dari z = F (x,y) adalah :

 dnz = ( $\frac{∂}{∂ x}$ dx + $\frac{∂}{∂ y}$ dy )n z

5.6. Derivatif Total

 1) Z = F (x,y) , x = g (t) , y = h (t) ; maka Z fungsi dari t :

 $\frac{dz}{dt}$ = $\frac{∂z}{∂x} . \frac{dx}{dt}$ + $\frac{∂z}{∂y} . \frac{∂y}{∂t}$

 Contoh : z = x2 + xy + y2 ; x = sin t , y = cos t . Ditanya : $\frac{∂z}{∂t}$

 Penyelesaian :

 $\frac{∂z}{∂t}$ = $\frac{∂z}{∂x} . \frac{dx}{dt}$ + $\frac{∂z}{∂y} . \frac{dy}{dt}$ = (2x + y) cos t - (x + 2y) sin t

 2) z = F ( x,y ) , y = h (x) ; maka z fungsi dari x :

 $\frac{dz}{dx}$ = $\frac{∂F}{∂x} . \frac{dx}{dx}$ + $\frac{∂F}{∂y} . \frac{dy}{dx}$ = $\frac{∂F}{∂x}$ + $\frac{∂F}{∂y}$ . $\frac{dy}{dx}$

 $\frac{dz}{dy}$ = $\frac{∂F}{∂x} . \frac{dx}{dy}$ + $\frac{∂F}{∂y} . \frac{dy}{dy}$ = $\frac{∂F}{∂x}$ + $\frac{dx}{dy}$ . $\frac{∂F}{∂y}$

Contoh : z = xy2 + x2y , y = Ln x . Ditanya : $\frac{dz}{dx}$ dan $\frac{dz}{dy}$

Penyelesaian :

 $\frac{dz}{dx}$ = $\frac{∂F}{∂x}$ + $\frac{∂F}{∂y}$ . $\frac{dy}{dx}$ = ( y2 + 2xy ) + ( 2xy + x2 ) . ( $\frac{1}{x}$ )

 $\frac{dz}{dy}$ = $\frac{∂F}{∂x}$ + $\frac{dx}{dy}$ . $\frac{∂F}{∂y}$ = ( y2 + 2xy ) (x) + ( 2xy + x2 )

3) z = F ( x,y )

 x = g ( r,s ) z fungsi dari r dan s

 y = h ( r,s )

 $\frac{∂z}{∂r}$ = $\frac{∂z}{∂x}$ . $\frac{∂x}{∂r}$ + $\frac{∂z}{∂y}$ . $\frac{∂y}{∂r}$ = zx  **.** xr + zy **.** yr

dan $\frac{∂z}{∂s}$ = $\frac{∂z}{∂x}$ . $\frac{∂x}{∂s}$ + $\frac{∂z}{∂y}$ . $\frac{∂y}{∂s}$ = zx  **.** xs + zy **.** ys

Contoh : z = x2 + xy + y2 ; x = 2r + s , y = r - 2s

Ditanya : $\frac{∂z}{∂r}$ dan $\frac{∂z}{∂s}$

Penyel. : $\frac{∂z}{∂x}$ = 2x + y ; $\frac{∂z}{∂y}$ = x + 2y

 $\frac{∂x}{∂r}$ = 2 ; $\frac{∂x}{∂s}$ = 1 ; $\frac{∂y}{∂r}$ = 1 , $\frac{∂y}{∂s}$ = -2

 $\frac{∂z}{∂r}$ = zx **.** xr + zy **.** yr = ( 2x + y ) **.** 2 + ( x + 2y ) **.** 1 = 5x + 4y

$\frac{∂z}{∂r}$ = zx **.** xs + zy **.** ys = ( 2x + y ) **.** 1 + ( x + 2y ) **.** (-2) = -3y

5.7. Fungsi Homogin

 Fungsi F (x,y) disebut fungsi homogin derajat n dalam x dan y , jika :

 F ( λ x , λ y ) = λn F ( x,y ) ; λ sembarang konstanta

 atau F ( x,y ) = xn f ( $\frac{x}{y}$ )

 Contoh :

 1) F ( x,y ) = x3 + 3x2y + y3 homogin derajat 3

 2) F ( x,y ) = $\frac{2x + y}{x^{2}y}$ homogin derajat -3

 3) F ( x,y ) = arc tg $\frac{x}{y}$ homogin derajat 0

Theorema Euler untuk fungsi homogin

 Jika Z = F ( x,y ) fungsi homogin derajat n dalam x dan y , maka :

x $\frac{∂z}{∂x}$ + y $\frac{∂z}{∂y}$ = n z .

 Bukti :

 Pandang Z = F ( x,y ) = a1x α1y β1 + a2x α2y β2 + . . . + anx αny βn

 Dimana : α 1 + β1 = α2 + β2 = . . . . = α n + βn = n

 $\frac{∂z}{∂x}$ = a1 α1x α1-1  y β1  + a2 α2x α2-1  y β2 + . . . . + an αnx αn-1 y βn

 $\frac{∂z}{∂y}$ = a1 β 1x α1y β1-1  + a2 β 2xα1  y β2-1 + . . . . + an βnx αn y βn-1

 x $\frac{∂z}{∂x}$ + y $\frac{∂z}{∂y}$ = a1 α1x α1y β1 + a2  α2x α2y β2 + . . . . + an  αnx αny βn

 + a1 β 1x α1y β1  + a2 β 2x α2y β2 + . . . . + an βnx αny βn

 = ( α1 + β1 ) α1x α1y β1  + ( α2 + β2 ) α2x α2y β2  + . . . . +

 ( αn + βn ) αnx αny βn

 = n ( α1x α1y β1  + α2x α2y β2  + . . . . + αnx αny βn  )

 = n z

 **.** . **.**  x $\frac{∂z}{∂x}$ + y $\frac{∂z}{∂y}$ = n z ||

**5.8. Deret Taylor dari z = F ( x , y ) disekitar titik ( a , b ).**

Pandang z = F ( x , y ) fungsi yang mempunyai turunan parsial kontinu sampai dengan turunan tingkat n pada setiap titik ( x , y ) ditetangga titik ( a , b ).

 Ambil : x = a + t ∆ x ,

 y = b + t ∆ y ; dimana t suatu variabel bebas ,

 Maka : z = F ( x , y ) = F ( a + t ∆ x , b + t ∆ y ) = G ( t ).

 Deret Maclaurin dari z = G ( t ) adalah :

 G ( t ) = G ( O ) + G’ ( O ) . t + $\frac{1}{2!}$ G” ( 0 ) . t2 + $\frac{1}{3!}$ G” ‘ ( 0 ) . t3  + . . . . . . . .

 Pasang t = 1 , maka :

 G ( t ) = G ( 0 ) + G’ ( 0 ) + $\frac{1}{2!}$ + G” ( 0 ) + $\frac{1}{3!}$ G” ‘ ( 0 ) + . . . . . . . . . ( 1 )

 Karena dx = ∆ x dt , dy = ∆ y dt , maka :

 dnz = ( $\frac{∂}{∂x}$ dx + $\frac{∂}{∂y}$ dy ) nF ( x , y )

 = ( $\frac{∂}{∂x}$ ( ∆ x dt ) + $\frac{∂}{∂y}$ ( ∆ y dt ) nF ( x , y )

 dnz = ( $\frac{∂}{∂x}$ ∆ x + $\frac{∂}{∂y}$ ∆ y ) nF ( x , y ) . ( dt )n

 Sehingga :

 $\frac{dnz}{dtn}$ = G (n) ( t ) = ( $\frac{∂}{∂x}$ ∆ x + $\frac{∂}{∂y}$ ∆ y )F ( x , y )

 Untuk t = 0 maka x = a , y = b dan :

 G (n) ( 0 ) = ( $\frac{∂}{∂x}$ ∆ x + $\frac{∂}{∂y}$ ∆ y )n  F ( x,y ) ; n = 0, 1, 2, . . . .

 x=a

 y=b

 Perhatikan bahwa :

 G ( 0 ) ( 0 ) = G ( 0 ) = F ( a,b )

 G ( 1 ) ( 0 ) = ( $\frac{∂}{∂x}$ ∆ x + $\frac{∂}{∂y}$ ∆ y ) F ( x,y ) = ∆ xFx ( a,b ) + ∆ yFy (a,b)

 x=a

 y=b

 G ( 2 ) ( 0 ) = ( $\frac{∂}{∂x}$ ∆ x + $\frac{∂}{∂y}$ ∆ y )2  F ( x,y )

 x=a

 y=b

 = ( ∆ x )2 Fxx ( a,b ) + 2 ∆ x ∆ y Fxy ( a,b ) + ( ∆ y )2 Fyy ( a,b )

 Untuk t = 1 maka G (1) = F ( a + ∆x , b + ∆y ) dan

 ∆x = x - a , ∆y = y - b ; sehingga (1) menjadi :

 F ( a + ∆x , b + ∆y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

 $\frac{1}{2!}$ [ ( x-a )2 Fxx ( a,b ) + 2 ( x-a ) ( y-b ) Fxy ( a,b ) + ( y-b )2 Fyy ( a,b ) ] +

 $\frac{1}{3!}$ [ ( x-a )3 Fxxx ( a,b ) + 3 ( x-a )2 ( y-b ) Fxxy ( a,b ) +

 3 ( x-a ) ( y-b )2 Fxyy ( a,b ) + ( y-b )3 Fyyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . .

 Ini disebut deret Taylor dari z = F ( x,y ) disekitar titik ( a,b )

 Deret Maclaurin dari z = F ( x , y ) adalah kejadian khusus dari deret Taylor diatas dimana a = b = 0

Ringkasnya sebagai berikut :

 **DERET TAYLOR DARI Z = F ( x,y ) DISEKITAR TITIK ( a,b )** **:**

 F ( x,y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

 $\frac{1}{2!}$ [ ( x-a )2 Fxx ( a,b ) + 2 ( x-a ) ( y-b ) Fxy ( a,b ) + ( y-b )2 Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . .

 atau :

 F ( x,y ) = $\sum\_{n=0}^{\infty }\frac{1}{n!}$ [ ( x-a ) $\frac{∂}{∂x}$ + ( y-b ) $\frac{∂}{∂x}$ ]n  F ( a,b )

 Jika x - a = h , y - b = k

 F ( a + h , b + k ) = F ( a,b ) + hFx ( a,b ) + k Fy ( a,b ) +

 $\frac{1}{2!}$ [ h2Fxx ( a,b ) + 2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . atau :

 F ( a+h , b+k ) = $\sum\_{n=0}^{\infty }\frac{1}{n!}$ ( h $\frac{∂}{∂x}$ + k $\frac{∂}{∂x}$ )n  . F ( a,b )

 DERET MACLAURIN DARI Z = F ( x,y )

 F ( x,y ) = F ( 0,0 ) + x Fx ( 0,0 ) + y Fy ( 0,0 ) +

 $\frac{1}{2!}$ ( x2Fxx  ( 0,0 ) + 2xy Fxy  ( 0,0 ) + y2Fyy  ( 0,0 ) + . . . . . . . .

 Atau :

 F ( x,y ) = $\sum\_{n=0}^{\infty }\frac{1}{n!}$ ( x $\frac{∂}{∂x}$ + y $\frac{∂}{∂y}$ )n  F ( 0,0 )

Contoh :

1. Dapatkan ekspansi ( deret Taylor ) dari arc tg $\frac{y}{x}$ disekitar ( 1,1 ) cukup s/d suku-suku

 derajat dua saja.

 Penyelesaian :

 F ( x,y ) = arc tg $\frac{y}{x}$ ; Fxx ( x,y ) = 2xy ( x2  + y2 )-2

 Fx ( x,y ) = - $\frac{y}{x^{2}+ y^{2} }$ ; Fxy ( x,y ) = ( y2  - x2 ) ( x2  + y2 )-2

 Fy ( x,y ) = $\frac{x}{x^{2}+ y^{2} }$ ; Fyy ( x,y ) = -2xy ( x2  + y2 )-2

 Untuk x = 1 , y = 1 🡺

 F ( 1,1 ) = arc tg 1 = $\frac{π}{4}$ ; Fx ( 1,1 ) = - $\frac{1}{2}$ , Fy ( 1,1 ) = $\frac{1}{2}$

 Fxx ( 1,1 ) = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$ ; Fxy ( 1,1 ) = 0 , Fyy ( 1,1 ) = $\frac{-2}{4}$ = - $\frac{1}{2}$

 F ( x,y ) = F ( 1,1 ) + ( x-1 ) Fx ( 1,1 ) + ( y-a ) Fy ( 1,1 ) +

 $\frac{1}{2!}$ [ ( x-1 )2  Fxx ( 1,1 )+ 2( x-1 ) ( y-1 ) Fxy (1,1) + ( y-1)2 Fyy (1,1)

 + . . . . . . .

 arc tg $\frac{y}{x}$ = $\frac{π}{4}$ - $\frac{1}{2}$ ( x-1 ) + $\frac{1}{2}$ ( y-1 ) + $\frac{1}{2}$ [ $\frac{1}{2}$ ( x-1 )2  - $\frac{1}{2}$ ( y-1 )2  ] + . . . . ..

2. Dapatkan deret Maclaurin dari F ( x,y ) = cos x cox y

 cukup s/d suku-suku derajat dua saja.

 Penyelesaian :

 F ( x,y ) = cos x cos y ; Fxx ( x,y ) = - cos x cos y

 Fx ( x,y ) = - sin x cos y ; Fxy  ( x,y ) = sin x sin y

 Fy ( x,y ) = - cos x sin y ; Fyy ( x,y ) = - cos x cos y

 Untuk x = 0 , y = 0 🡺

 F ( 0,0 ) = 1 , Fx ( 0 , 0 ) = 0 , Fy ( 0,0 ) = 0 , Fxx ( 0,0 ) = -1 ,

 Fxy ( 0,0 ) = 0 , Fyy ( 0,0 ) = - 1

 F ( x,y ) = F (0,0) + xFx (0,0)+yFy (0,0) + $\frac{1}{2}$ ( x2 Fxx (0,0)+2xyFxy(0,0)+y2Fyy (0,0)

 **.** . **.** cos x cos y = 1 - $\frac{1}{2}$ ( x2 + y2 ) + . . . .

**5.9. Nilai Ekstrem dari z = F ( x,y )**

Fungsi Z = F ( x,y ) mencapai maximum pada ( a,b ) jika untuk h << , k << ( baca : h dan k cukup kecil ) berlaku : F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) < 0

 Fungsi z = F ( x,y ) mencapai minimum pada ( a,b ) jika untuk h << dan k << , berlaku

 F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) > 0

 Deret Taylor dari z = F ( x,y ) disekitar ( a,b ) adalah :

 F ( x,y ) = F ( a,b ) + ( x-a ) Fx ( a,b ) + ( y-b ) Fy ( a,b ) +

 $\frac{1}{2}$ [( x-a )2 Fxx ( a,b )+2 (x-a) (y-b) Fxy ( a,b ) + (y-b)2 Fyy( a,b )]+ . . . . . . .

 Jika x - a = h , y - b = k , maka :

 F ( a+h , b+k ) = F ( a,b ) + hFx ( a,b ) + kFy ( a,b ) + $\frac{1}{2}$ [ h2Fxx ( a,b ) +

 2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ] + . . . . . . . . . . . . ( 1 )

 z = F ( x,y ) mencapai titik extrim pada ( a,b ) maka Fx ( a,b ) = 0

 dan Fy ( a,b ) = 0 , sehingga ( 1 ) menjadi :

 F ( a+h , b+k ) - F ( a,b ) = $\frac{1}{2}$ [ h2Fxx ( a,b ) + 2hkFxy ( a,b ) + k2Fyy ( a,b ) ]

 = $\frac{1}{2}$ . $\frac{1}{Fxx ( a,b )}$ [ h2F2xx ( a,b ) + 2hkFxx ( a,b ) Fxy ( a,b ) + k2F2xy ( a,b )

 + k2Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) - k2F2xy ( a,b ) ]

= $\frac{1}{2}$ . $\frac{1}{Fxx ( a,b )}$ [{ hFxx ( a,b ) + kFxy ( a,b ) }2  + k2 { Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) -F2xy ( a,b )}]

 positif positif ∆

 F ( a,b , b+k ) - F ( a,b ) = $\frac{1}{2Fxx ( a,b )}$ [ positif + positif . ∆ ]

 Dst baca ringkasannya berikut :

 Ringkasnya sebagai berikut

 MAXIMUM & MINIMUM DARI Z = F ( x,y )

 Titik-titik kritis ( calon-calon titik extrim ) :

 $\frac{∂F}{∂x}$ = 0

 misal ketemu x = a , y = b

 $\frac{∂F}{∂y}$ = 0

 ∆ = Fxx ( a,b ) Fyy ( a,b ) - F2xy ( a,b )

1) Jika ∆ > 0 & Fxx ( a,b ) < 0 🡺 Zmax  = F ( a,b )

 ( Fyy ( a,b ) < 0 )

2) Jika ∆ > 0 & Fxx ( a,b ) > 0 🡺 Zmin  = F ( a,b )

 ( Fyy ( a,b ) > 0 )

3) Jika ∆ < 0 🡺 ( a,b ) titik sadel (pelana)

4) Jika ∆ = 0 🡺pada ( a,b ) tidak ada keterangan

MAXIMUM DAN MINIMUM DENGAN SYARAT TAMBAHAN

Ekstrima dari z = f(x,y) dengan syarat tambahan : g(x,y) = 0

Dibentuk fungsi Lagrange :

 F(x,y) = f(x,y) + λ g(x,y)

Fx= fx + λ gx = 0 Syarat supaya terjadi esktrim. Dari sini ketemu x,y,λ.

Fy= fy + λ gy = 0 λ disebut pengganda Langrage, (bebas dari x dan y)

 g(x,y) = 0