Universitas Esa Unggul Kampus Harapan Indah	**MODUL VI** **MATEMATIKA**	
Judul	**FUNGSI MATEMATIKA DAN LIMIT FUNGSI**	
Penyusun	**Distribusi**	**Perkuliahan**
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan – VI online

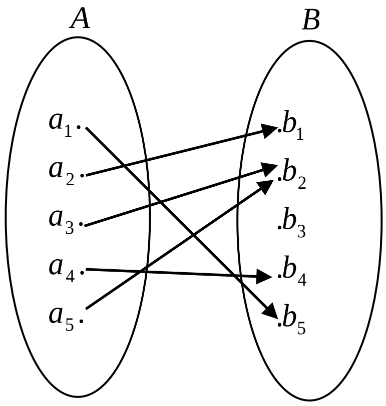
Tujuan :
1. Mahasiswa memahami fungsi, sifat dan operasi dasarnya.
2. Mahasiswa memahami tentang limit, sifat dan operasina

Materi:
1. Menggambarkan grafik fungsi.
2. Daerah definisi dan daerah hasil suatu fungsi.
3. Daerah definisi operasi dua fungsi atau lebih.
4. Komposisikan dua fungsi.
5. Kesamaan fungsi trigonometri.
6. Limit di tak hingga dan limit tak hingga.
7. Penyelesaian limit fungsi, limit kiri dan limit kanan.
8. Kekontinuan fungsi di satu titik.
9. Kekontinuan fungsi di satu interval

FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI

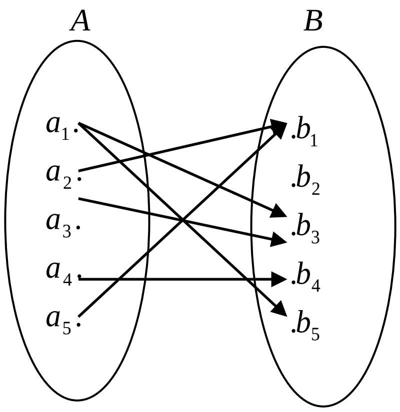
1. Fungsi dan Grafiknya

Misal $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ adalah dua himpunan yang anggotanya berhingga, berdasarkan fakta tersebut selanjutnya dapat dibuat hubungan (relasi) antara himpunan A dan B. Relasi yang dibuat dapat berupa lebih besar, kuadrat dari, 1 selisihnya, atau relasi yang lain.
Perhatikan gambar berikut ini.



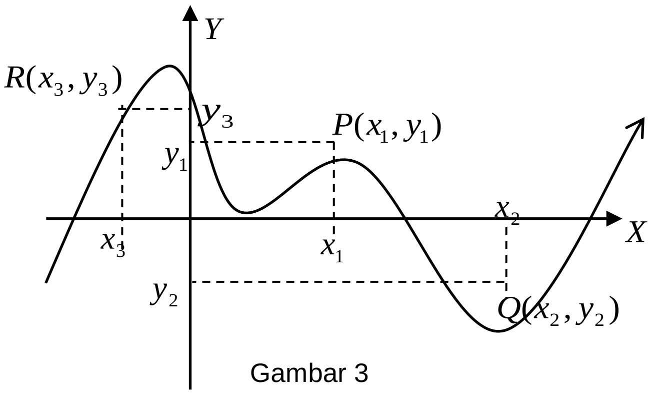
Gambar 1

Berdasarkan relasi yang digambarkan pada gambar 2.1 di atas, tampak bahwa semua anggota himpunan A mempunyai pasangan (peta) di B, sebaliknya tidak semua atau anggota himpunan B yang tidak mempunyai prapeta di A. Jika setiap anggota himpunan A mempunyai pasangan ”satu dan hanya satu” di B maka relasi tersebut dinamaka fungsi atau pemetaan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa setiap fungsi adalah relasi, akan tetapi setiap relasi belum tentu fungsi. Seperti gambar berikut ini adalah relasi akan tetapi bukan fungsi.



Gambar 2

Selanjutnya, andaikan A dan B anggotanya tidak berhingga, maka dapat dibuat garis real dalam bentuk sumbu koordinat X dan Y. Semua titik pada sumbu X yang mempunyai pasangan di X disebut daerah asal (*domain*), sedangkan semua titik pada sumbu Y yang mempunyai prapeta di A disebut daerah hasil (*range*).



Gambar 3

Definisi:
Fungsi adalah suatu aturan korespondensi satu-satu yang menghubungkan setiap objek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (*domain*) dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan yang kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (*range*).

Secara umum untuk memberi nama suatu fungsi digunakan simbol berupa f atau F. Maka $f(x)$ dibaca "fungsi f pada x". Hal ini menunjukkan nilai yang diberikan oleh fungsi f terhadap nilai x.

Jadi secara umum jika f : A $\rightarrow$ B adalah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B. A disebut daerah asal dan B disebut daerah hasil.

Untuk menentukan daerah asal dan daerah hasil statu fungsi secara lengkap kita harus menyatakan, disamping aturan yang bersesuian daerah asal fungsi. Misalnya jika f adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x + 1$ maka daerah asal alamiah (domain) $f(x)$ adalah semua bilangan real dan daerah hasil (range) adalah semua bilangan real. $f(x) = x + 1$ daerah asal alamiahnya semua bilangan real karena untuk setiap x bilangan real $f(x)$ mempunyai nilai.

Contoh

Tentukan daerah asal alamiah dan range dari:

1. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

   Jawab

   Daerah asal alamiah $(D) = \{x \mid x \leq 1\} = (-\infty, 1]$

   Daerah hasil $(R) = \{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

   Jawab

   Daerah asal alamiah $(D) = R - \{-1,1\}$ => {x| x≠1 dan x≠-1; xϵR}

   Daerah hasil $(R) = R - \{0\}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   Jawab

   Daerah asal alamiah $(D) = R - (-1,1)$

   Daerah hasil $(R) = [0,1]$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

   Jawab

   Daerah asal alamiah $(D) = \{x \mid x > 1\} = (1, \infty)$

   Daerah hasil $(R) = \{x \mid 0 < x < 1\} = (0,1)$

Catatan

Jika $f(x), g(x)$ fungsi-fungsi yang terdefinisi pada interval tertentu dalam R maka:

1. Jika $f(x) = f(-x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi genap

Contoh

a) $f(x) = x^4 - x^2$ adalah fungsi ganjil karena $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ adalah fungsi genap

c) $f(x) = 6$ adalah fungsi genap

2. Jika $-f(x) = f(-x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi ganjil

Contoh

a) $f(x) = x^3 - x$ adalah fungsi ganjil

b) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2+x^3}}$ adalah fungsi bukan ganjil

3. jika $f(x) = f(-x) = -f(x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi genap dan ganjil

Contoh

a. $f(x) = 0$ fungsi genap dan ganjil karena $f(x) = 0$, $-f(x) = -0 - 0$ dan $f(-x) = 0$ sehingga $f(x) = f(-x) = -f(x)$

4. jika $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi tidak genap tidak ganjil.

Contoh

a) $f(x) = 1 - x$ adalah fungsi bukan genap dan bukan ganjil

b) $f(x) = x - x^2$ adalah fungsi bukan genap bukan ganjil

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ adalah bukan fungsi genap bukan fungsi ganjil.

2. Operasi Pada Fungsi

Sepertihalnya pada bilangan, fungsi dapat dioperasikan dengan tanda operasi pada bilangan. Operasi tersebut adalah + (jumlah), - (selisih), : (pembagian), dan . (perkalian).

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ dua fungsi yang terdefinisi pada suatu selang tertentu , operasi pada kedua fungsi dinyatakan dengan:

1. $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$
2. $f(x) - g(x) = (f-g)(x)$
3. $f(x).g(x) = (f.g)(x)$
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \; asalkan \; g(x) \neq 0$
5. $\underbrace{f(x).f(x).f(x).f(x)...f(x)}_{\text{n faktor}} = (f.f.f.f.f...f)(x) = [f(x)]^n = f^n(x)$

Selain dengan menggunakan operasi di atas, dua fungsi atau lebih dapat dikomposisikan. Jika fungsi f mempunyai daerah hasil $f(x)$ dan fungsi g mempunyai daerah definisi $g(f(x))$, maka dapat dikatakan kita telah mengkomposisikan $g(x)$ dengan $f(x)$. Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi fungsi g dengan fungsi f dan dinotasikan dengan gof, sehingga $(gof)(x) = g(f(x))$

Dengan cara yang sama kita juga dapat melakukan komposisi $f(x)$ dengan $g(x)$. Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi fungsi f dengan fungsi g dan dinotasikan dengan $(fog)(x)$ sehingga $(fog)(x) = f(g(x))$

Contoh

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad g(x) = 2 + \dfrac{1}{1-x}$

   a) $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \left(2 + \dfrac{1}{1-x}\right)$

b) $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \left(2 + \dfrac{1}{1-x}\right)$

c) $f(x).g(x) = \sqrt{x^2 - 4}\left(2 + \dfrac{1}{1-x}\right)$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2 + \dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{(1-x)\sqrt{x^2-4}}{3-x}$

2. $f(x) = 1 - x, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

a. $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= 1 - g(x)$$

$$= 1 - \left(1 - \sqrt{x}\right)$$

$$= \sqrt{x}$$

b. $(gof)(x) = g(f(x))$

$$= 1 - \sqrt{f(x)}$$

$$= 1 - \sqrt{1-x}$$

Berdasarkan a dan b $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$

a. $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= \frac{1}{2 - g(x)}$$

$$= \frac{1}{2 - \sqrt{1-x^2}}$$

b. $(gof)(x) = g(f(x))$

$$= \sqrt{1 - f^2(x)}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2-x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4-4x-x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3-4x-x^2}{4-4x-x^2}}$$

Berdasarkan a dan b $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

Soal-soal

1. Tentukan daerah asal alamiah dan range, daerah definisi dan daerah hasil fungsi-fungsi berikut:

   a) $f(x) = 1 - \sqrt{1+x}$

   b) $g(x) = \dfrac{1}{2x}$

   c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   d) $g(x) = 1 - x^2$

   e) $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$

   f) $f(x) = x^3 - 1$

   g) $f(x) = x^2 + 4$,

   h) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

   i) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

   j) $h(x) = 2 + \sqrt[3]{1+x}$

2. Tentukan daerah definisi $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ (f.g)(x),$ dan $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ jika:

   a) $f(x) = 1 - \sqrt{1+x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{2x}$

   b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = 1 - x^2$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}, \quad g(x) = x^3 - 1$

   d) $f(x) = x^2 + 4, \quad g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

   f) $f(x) = 5, \quad g(x) = -2$

   g) $f(x) = x, \quad g(x) = 1$

3. Tentukan $(fog)(x)$ dan $(gof)(x)$ jika

   a) $f(x) = 1 - \sqrt{1+x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{2x}$

b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad g(x)=1-x^2$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}, g(x)=x^3-1$

d) $f(x)=x^2+4, \quad g(x)=\dfrac{2}{x-3}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2-3}, g(x)=\sqrt{x-1}$

3. Limit Fungsi

a. Limit Fungsi di Satu Titik

Perhatikan fungsi $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

Fungsi di atas mempunyai daerah definisi $(D)=R-\{1\}$

Bagaimana nilai $f(x)$ jika x diganti dengan sebarang bilangan real yang mendekati 1.

Perhatikan tabel berikut ini

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	....	1	....	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	4,8	4,98	4,998	4,9998	...	?	....	5,0002	5,002	5,02	5,2

Berdasarkan tabel di atas,

1. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,1 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,2
2. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,01 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,02
3. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,001 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,002
4. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,0001 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,0002
5. dan seterusnya.

Dengan menggunakan notasi harga mutlak untuk menyatakan jarak, maka berdasarkan tabel di atas,

1. Jika $0<|x-1|<0{,}1$ maka $|f(x)-5|<0{,}2$
2. Jika $0<|x-1|<0{,}01$ maka $|f(x)-5|<0{,}02$
3. Jika $0<|x-1|<0{,}001$ maka $|f(x)-5|<0{,}002$
4. Jika $0<|x-1|<0{,}0001$ maka $|f(x)-5|<0{,}0002$
5. dan seterusnya

Dengan meninjau dari sudut lain, yaitu dengan terlebih dahulu memandang lebih dahulu nilai $f(x)$. Nilai $f(x)$) didekatkan ke 5 sekehendak kita asalkan nilai diambil cukup denkat dengan 1, Artinya $|f(x)-5|$ dapat kita buat sekehendak kita,asalkan $|x-1|$ cukup kecil pula dan x $\approx$1.

Lambang-lambang yang biasa digunakan untuk selisih yang kecil ini adalah bilangan positip ε (epsilon) dan δ (delta). Sehingga kita menyatakan dengan

$|f(x)-5|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$ .....(1)

Adalah penting untuk memahami besarnya bilangan positip δ tergantung dari besarnya bilangan positip ε .

Berdasarkan tabel kita dapatkan $|f(x)-5|\approx 0{,}2$ jika $|x-1|\approx 0{,}1$. Jadi untuk $\varepsilon \approx 0{,}2$ ada $\delta \approx 0{,}1$ dan berlaku $|f(x)-5|<0{,}2$ apabila $0<|x-1|<0{,}1$. Hal ini sesuai dengan pernyataan (1) dengan $\varepsilon = 0{,}2$ dan $\delta = 0{,}1$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}02$ dan $\delta = 0{,}01$ dan dikatakan

$|f(x)-5|<0{,}02$ apabila $0<|x-1|<0{,}01$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (2) dengan $\varepsilon = 0{,}02$ dan $\delta = 0{,}01$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}002$ dan $\delta = 0{,}001$ dan dikatakan

$|f(x)-5|<0{,}002$ apabila $0<|x-1|<0{,}001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (3) dengan $\varepsilon = 0{,}002$ dan $\delta = 0{,}001$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}0002$ dan $\delta = 0{,}0001$ dan dikatakan

$|f(x)-5|<0{,}0002$ apabila $0<|x-1|<0{,}0001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (4) dengan $\varepsilon = 0{,}0002$ dan $\delta = 0{,}0001$. Dan seterusnya

Bagaimanapun kecilnya bilangan positip ε diberikan selalu dapat ditentukan bilangan positip δ yang tergantung pada besarnya ε tersebut sehingga berlaku:

$|f(x)-5|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$

Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sehingga

$|f(x)-5|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$

Maka kita mengatakan lim $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah 5 dan pernyataan ini ditulis dengan

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \; atau \; \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = 5$$

Definisi

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang buka I yang memuat a kecuali di a sendiri, Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L, a,L bilangan real ditulis dengan $\lim_{x\to a} f(x) = L$, Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga $|f(x)-L|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$ dan ditulis dalam bentuk singkat

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \ni |f(x)-L| < \varepsilon \; bila \; 0|x-a| < \delta$$

Contoh

1. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 3}(4x-1) = 11$

   Bukti

   Yang harus ditunjukkan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$

   $\Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-a| < \delta$

   $\Leftrightarrow |(4x-1)-11| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-3| < \delta$

   Tetapi $|(4x-1)-11| = |4x-12| = 4|x-3|$

   Jadi yang diinginkan adalah $4|x-3| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-3| < \delta$

   Atau $|x-3| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ apabila $0 < |x-3| < \delta$

   Ambil $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, maka akan terpenuhi

   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |4x-12| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-3| < \delta$

2. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to -4}\left(\dfrac{12}{2-x}\right) = 2$

   Bukti

   Yang harus ditunjukkan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$

   $\Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-a| < \delta$

   $\Leftrightarrow \left|\dfrac{12}{2-x} - 2\right| = \left|\dfrac{12-3+2x}{2-x}\right| = \dfrac{2}{|2-x|}|x+4|$

   Misal $0 < \delta \le 1$ maka $0 < |x+4| < \delta \le 1$ dan

   $|2-x| = |6-(4+x) \ge 6 - |x+4\ | \ge 6-1 = 5$, sehingga $\dfrac{2}{|2-x|} \le \dfrac{1}{5}$

   Ambil $\delta = \min\{1, \dfrac{5}{2}\}$ maka akan terpenuhi $\left|\dfrac{12}{2-x}\right| < \varepsilon$ apabila $0 < |x+3| < \delta$

   Berarti bahwa $\lim\limits_{x \to -4} = \dfrac{12}{2-x} = 2$

b. Teorema Limit

Misal n bilangan bulat positip, k bilangan real, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di titik $x = c$, maka:

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} k\ f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} \ (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} (f(x)\ \ g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}, \mathit{asalkan} \lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

Teorema di atas, dapat diaplikasikan dalam banyak hal pada penyelesaian soal-soal tentang limit.

Contoh:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 = 3 \lim\limits_{x \to 2} x^2$ ....(3)

   $= 3\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2$ ....(8)

   = $3(2)^2$ ....(2)

   = 12

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x \to 2} x}$ ....(7)

   $= \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 3}{\lim\limits_{x \to 2} x}$ ....(5)

   $= \dfrac{2-3}{2}$

   $= -\dfrac{1}{2}$

3. Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3 \; dan \; \lim\limits_{x \to a} g(x) = -1$

Tentukan:

a. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = ...$

Jawab

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a}\{ f^2(x) + g^2(x)} \quad \text{........(9)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to a} f^2(x) + \lim_{x \to a} g^2(x)} \quad \text{.....(4)}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^2 + \left(\lim_{x \to a} g(x)\right)^2} \quad \text{.....(8)}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

b. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{f(x)}\{g(x) + 3 \;\} = \lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{f(x)}\left(\lim\limits_{x \to a} g(x) + 3 \right)$

$$= \lim_{x \to a} \sqrt[3]{f(x)} \; \{\lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to 3} 3\}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to a} f(x)} \; \{\lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} 3\}$$

$$= \sqrt[3]{3}(-1+3)$$

$$= 2\sqrt[3]{3}$$

c. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}\left(2f(x) - 3g(x)\right)}{\lim\limits_{x \to 2}\left(f(x) + g(x)\right)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2} 2f(x) - \lim\limits_{x \to 2} 3g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x \to 2} f(x) - 3\lim\limits_{x \to 2} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$= \frac{2(3) - 3(-1)}{3 + (-1)}$$

$$= \frac{9}{2}$$

Soal-soal

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+4x^2-19x+14}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x^2+3x+4}{x^3+10}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1}}{x}$

9. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ jika\ f(x)=x^3+2\sqrt{x}$

10. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ jika\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

4. Limit Sepihak

Pada definisi limit fungsi di satu titik, $f(x)$ terdefinisi pada suatu selang buka yang memuat a, keculai mungkin dia sendiri. Artinya nilai-nilai x yang dekat dengan a, dapat kurang dari a dan dapat lebih dari a.

Misal $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

Fungsi di atas tidak terdefinisi dalam selang buka yang memuat -4, juga tidak terdefinisi dalam selang buka yang memuat 4, hal ini dikarenakan daerah definisi $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ adalah [-4,4], Dengan demikian kita dapat mengatakan

$\lim\limits_{x\to -4} \sqrt{16-x^2}$ dan $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{16-x^2}$

Namun demikian $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ dapat dibuat sedekat mungkin menurut kehendak kita ke 0, dengan memilih nilai x yang cukup dekat dengan -4 (asalkan lebih besar -4). Dengan kata lain $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ akan mendekati 0 dengan memilih x yang dekat denga (-4) dari arah kanan. Sehingga $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ mempunyai limit kanan di -4 dengan nilai limit 0 dan ditulis

$$\lim_{x\to -4^+} \sqrt{16-x^2} = L^- = 0$$

Demikian juga $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ dapat dibuat sedekat mungkin menurut kehendak kita ke 0, dengan memilih nilai x yang cukup dekat dengan 4 (asalkan lebih kecil dari 4). Dengan kata lain $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ akan mendekati 0 dengan memilih x yang dekat dengan (4) dari arah kiri. Sehingga $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ mempunyai limit kiri di 4 dengan nilai limit 0 dan ditulis

$$\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16-x^2} = L^- = 0$$

Limit dari arah kiri atau dari arah kanan di suatu titik dinamakan limit sepihak dan didefinisikan sebagai berikut.

1) Misal $f(x)$ suatu fungsi yang didefinisikan disetiap titik pada (a,c). Limit $f(x)$ untuk x mendekati a dari kanan, adalah L, $a \in R, \quad L \in R$

   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

   Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\partial > 0$ sehingga

   $$|f(x)-L| < \varepsilon \; apabila \; 0 < x-a < \delta$$

   Secara singkat ditulis

   $$\lim_{x\to a^+} L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 \ni |f(x)-L| < \varepsilon \; bila \; 0 < x-a < \delta$$

2) Misal f(x) suatu fungsi yang didefinisikan disetiap titik pada (d,a). Limit $f(x)$ untuk x mendekati a dari kiri adalah L, $a \in R, \quad L \in R$

   $$\lim_{x\to a^{-+}} f(x) = L$$

   Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\partial > 0$ sehingga

   $$|f(x)-L| < \varepsilon \; apabila \; -\delta < x-a < 0$$

   Secara singkat ditulis

   $$\lim_{x\to a^-} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 \ni |f(x)-L| < \varepsilon \; bila \; -\delta < x-a < 0$$

5. Limit di Tak Hingga

Perhatikan fungsi

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$f(x)$ mempunyai daerah definisi semua bilangan real (R)

Nilai $f(x)$ mendekati 2 apabila peubah x bertambah besar atau bertambah kecil. Hal ini berarti $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke 2. Dengan kata lain jarak $f(x)$ dengan 2 dapat dibuat lebih kecil dari bilangan positip sebarang. Dengan cara mengambil x cukup besar (lebih besar dari bilangan positip tertentu), atau dengan cara mengambil x cukup kecil (lebih kecil dari bilangan negatip tertentu).

Dalam kasus x mengambil nilai cukup besar, kita menyatakan dengan lambang

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \text{, dan}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

Kedua bentuk di atas dinamakan limit di tak hingga dan didefiniskan sebagai berikut:

1) Misal $f(x)$ didefinisikan disetiap titik pada (a,+∞). Jika limit $f(x)$ untuk x menuju positip tak hingga adalah L dan ditulis

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan P > 0 sehingga

$$|f(x) - L| < \varepsilon \ apabila \ x > P$$

Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P > 0 \ \ni |f(x) - L| < \varepsilon \ bila \ x > P$$

2) Misal $f(x)$ didefinisikan disetiap titik pada (-∞,b). Jika limit $f(x)$) untuk x menuju negatip tak hingga adalah L dan ditulis

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan N < 0 sehingga

$$|f(x) - L| < \varepsilon \ apabila \ x < N$$

Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N < 0 \ \ni |f(x) - L| < \varepsilon \ bila \ x < N$$

6. Limit Tak Hingga

Dalam definisi limit fungsi di satu titik, fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka yang memuat a, kecuali mungkin di a itu sendiri. Tetapi ada kalanya fungsi $f(x)$ akan membesar tanpa batas atau mengecil tanpa batas apabila x mendekati a.

Sebelum kita mendefinisikan limit tak hingga, perhatikan terlebih dahulu fungsi-fungsi berikut.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

b) $g(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

Fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ di atas terdefinisi pada selang buka yang memuat 3 kecuali di 3 sendiri. Bagaimana nilai $f(x)$ dan $g(x)$ apabila x mendekati 3?

Nilai $f(x)$ akan membesar tanpa batas, artinya nilai $f(x)$ dapat dibuat lebih besar dari bilangan positip manapun, asalkan nilai x cukup dekat dengan 3 dan bukan x = 3. Sebaliknya nilai $g(x)$ mengecil tanpa batas, artinya nilai $g(x)$ dapat dibuat lebih kecil dari bilangan negatip manapun apabila x cukup dekat dengan 3 dan bukan x = 3. Hal demikian di atas dinamakan dengan limit tak hingga dan ditulis dengan

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \lim\limits_{x\to 3} -\dfrac{1}{(x-3)^2} = -\infty$

Limit tak hingga didefinisikan sebagai berikut:

1) Misalkan $f(x)$ didefinisikan di setiap titik pada selang buka I = (a,b) yang memuat a kecuali mungkin di a sendiri. Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah positip tak hingga, dan ditulis

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

   Jika untuk setiap bilangan $P > 0$ ada bilangan $\partial > 0$ sehingga $f(x) > 0$ apabila $0 < |x-a| < \delta$. Secara singkat ditulis

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall P > 0 \, \exists \, \delta > 0 \ni f(x) > P \; bila \; 0 < |x-a| < \delta$$

2) Misalkan $f(x)$ didefinisikan di setipa titik pada selang buka I = (a,b) yang memuat a kecuali mungkin di a sendiri. Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah negatif tak hingga, dan ditulis

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

   Jika untuk setiap bilangan $P < 0$ ada bilangan $\partial > 0$ sehingga $f(x) < N$ apabila $0 < |x-a| < \delta$. Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0 \; \exists \, \delta > 0 \ni f(x) < N \; bila \; 0 < |x - a| < \delta$$

Catatan

1) Teorema limit di satu titik berlaku pada limit di tak hingga dan limit tak hingga.
2) Secara umum limit tak hingga bernilai tak hingga, sedang limit di tak hingga dapat bernilai tak hingga atau berhingga.

7. Bentuk Tak Tentu

Setiap menyelesaikan tentang limit, kita dihadapkan pada bentuk pembagian atau perkalian. Bentuk yang sering ditemukan ada 3 macam, yaitu :

1. *Bentuk terdefinisi* (tertentu) : yaitu bentuk yang nilainya ada dan tertentu, misalnya : $\frac{5}{3}, \frac{4}{7}$.
2. *Bentuk tak terdefinisi* : yaitu bentuk yang tidak mempunyai nilai, misalnya : $\frac{5}{0}$
3. *Bentuk tak tentu* : yaitu bentuk yang nilainya sembarang, misalnya : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$

Penting : Persoalan limit adalah mengubah *bentuk tak tentuk* menjadi *bentuk tertentu*.
Untuk jelasnya dapat dilihat pada pembahasan berikit ini:

Limit Fungsi Aljabar

Jika diketahui fungsi *f*(x) dan nilai *f*(a) terdefinisi, maka $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh :

1. $\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x) = (3^2 + 2(3)) = 9 + 6 = 15$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{5x + 7} = \frac{0^2 + 0}{5(0) + 7} = 0$

Berikut ini akan dibahas limit limit fungsi Aljabar *bentuk tak tentu* yaitu : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$.

Limit Bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *memfaktorkan pembilang* dan *penyebutnya*, kemudian *"mencoret"* faktor yang sama, lalu *substitusikan nilai* x = a.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Catatan :

1. Karena $x \to a$, maka $(x - a) \to 0$ sehingga pembilang dan penyebut boleh dibagi dengan $(x - a)$

2. Nilai limitnya ada jika dan hanya jika : $Q(a) \neq 0$
3. Jika pembilang atau penyebutnya memuat *bentuk akar*, maka sebelum difaktorkan dikalikan dulu dengan *bentuk sekawannya*.

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-5x}{x^3-4x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^2+x-5)}{x(x^2-4x+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x-5}{x^2-4x+2} = \frac{0^2+0-5}{0^2-4(0)+2} = \frac{5}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{(x^2-1)} \left(\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}} \right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2+3)-(5x-1)-2}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-4)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5x-1}\right)}$

$= \frac{1-4}{(1+1)\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)} = \frac{-3}{2(2+2)} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8}$

Limit Bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *membagi pembilang dan penyebut dengan variabel berpangkat tertinggi*, selanjutnya menggunakan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$.

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-2x^2+5x}{12x^3+7x^2-8x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}}{\frac{12x^3}{x^3}-\frac{7x^2}{x^3}-\frac{8x}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{12+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^3}} = \frac{6-0+0}{12+0-0} = \frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-7x^2-3x}{2x^4-x^3+4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^3}{x^4}-\frac{7x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{x^3}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{0+0-0}{2-0+2} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2+2}{2x^3+4x^2-7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}-\frac{7}{x^4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^4}} = \frac{5-0+0}{0+0-0} = \infty$

Kesimpulan:

Jika $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+ a_n$

dan $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ...+ b_m$

maka:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0}{b_0}, \ untuk\ n = m$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0,\ untuk\ n < m$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty\ atau\ -\infty,\ untuk\ n > m$

Soal-soal

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 + x^4 - 7x^3}{6x^5 - 2x^3 + 8x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{10} - 2x^8 + 3x^7}{x^{12} + 12x^5 + x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^7 + 6x^4 - 2}{2x^6 + 7x^4 - x^3}$

Limit Bentuk $(\infty - \infty)$

Limit ini umumnya memuat bentuk akar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right)$$

Cara Penyelesaian :

1. Kalikan dengan bentuk sekawannya !

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$

2. Bentuknya berubah menjadi $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

3. Selesaikan seperti pada limit sebelumnya.

Contoh:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x+2}-\sqrt{x^2-4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x+2}-\sqrt{x^2-4x+1}\left(\frac{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}}{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+6x+2\right)-\left(x^2-4x+1\right)}{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x-1}{\sqrt{x^2+6x+2}+\sqrt{x^2-4x+1}}=\frac{10}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{10}{2}=5$$

Sehingga

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x+2}-\sqrt{x^2-4x+1}=5$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\left(\frac{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(2x^2-x\right)-\left(x^2+3x\right)}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2-4x\right)}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-4)}{x\sqrt{2-\frac{1}{x}}+x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\infty$$

Secara umum:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}=$$

1) $\dfrac{b-q}{2\sqrt{a}},\ jika\ a=p$

2) $\infty,\ jika\ a>p$

3) $-\infty,\ jika\ a<p$

Sebagai latihan, buktikan soal-soal berikut:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-3x+1}-\sqrt{4x^2-5x-2} = \dfrac{-3-(-5)}{2\sqrt{4}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+7x-1}-\sqrt{3x^2+x-8} = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+3}-\sqrt{5x^2+4x-7} = -\infty$

Limit Bentuk $\left(1^{\infty}\right)$

Definisi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281\ldots.,\ n \in N$$

Dari definisi dapat dibuktikan teorema berikut :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\right)^{-\frac{1}{x}} = e$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{4}}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^4 = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^4 = e^4$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x.\frac{1}{2}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\lim\limits_{x\to\infty}1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1-3x\right)^{\frac{1}{-3x}}\right)^{-3} = \left(\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{-3x}}\right)^{-3} = e^{-3}$

8. Limit Deret Konvergen

Definisi : Deret Geometri Konvergen adalah deret geometri dengan rasio $-1 < r < 1$.

Teorema : $S = \dfrac{a}{1-r}$

S : jumlah tak hingga suku deret geometri konvergen

a : U_1 : suku pertama

r : rasio, yaitu $r = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$

Contoh :

1. Hitung jumlah tak hingga deret geometri berikut :

   a) $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.....$

   Jawab

   $S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

   b) $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+.....$

   Jawab

   $S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$

2. Hitung limit berikut :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4n}\right)$

   Jawab

   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}\right) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 2.3^{-i}$

   Jawab

   $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 2.3^{-i} = \lim\limits_{i=1}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+....+\frac{2}{3^n}\right) = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

3. Ubahlah menjadi pecahan biasa !

   a) 0,6666 .....

   Jawab

   $0{,}6666.... = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + ...$

   $= \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{0{,}6}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}6}{0{,}9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

b) 0,242424 .....

Jawab

$$0{,}242424.... = 0{,}24 + 0{,}0024 + 0{,}000024 + ...$$

$$= \frac{1}{1-r} = \frac{0{,}24}{1-0{,}1} = \frac{0{,}24}{0{,}99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

4. Jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 12, jumlah suku-suku bernomor genap adalah 4. Tentukan rasio dan suku pertama deret itu !

Jawab :

$$S = 12 \Leftrightarrow \frac{a}{1-r} = 12 \text{ ...... (1)}$$

$U_2 + U_4 + U_6 + ... = 4$

$ar + ar^3 + ar^5 + ... = 4$

$$\frac{ar}{1-r^2} = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-r}\right)\left(\frac{r}{1+r}\right) = 4 \quad \text{...... (2)}$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$$12\left(\frac{r}{1+r}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow 12r = 4 + 4r$$

$$\Leftrightarrow 8r = 4$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Selanjutnya berdasarkan (1) dan (2)

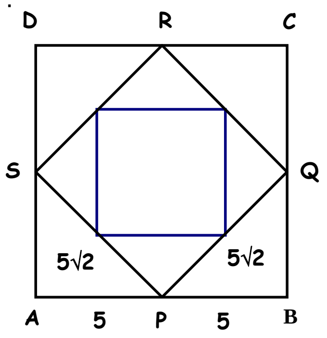
$$\frac{a}{1-r} = 12$$

$$\frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 12 \Leftrightarrow a = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Dengan demikian diperoleh rasio = $\frac{1}{2}$ dan suku pertama = 6

5. Diketahui sebuah bujursangkar dengan sisi 10 cm. Titik tengah keempat sisinya dihubungkan sehingga terbentuk bujursangkar kedua. Titik tengah keempat sisibujursangkar kedua dihubungkan lagi sehingga terbentuk bujursangkar ketiga, demikian seterusnya. Hitunglah jumlah luas semua bujursangkar itu !

Jawab :



Gambar 5

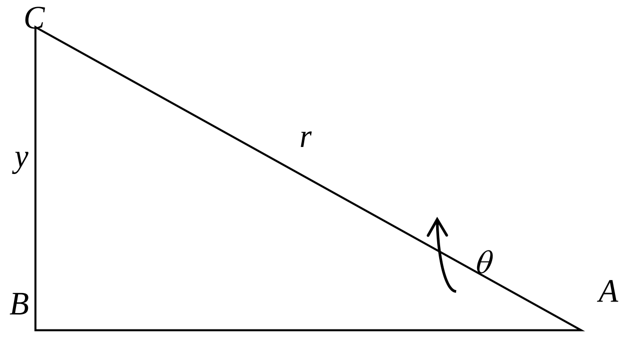
Luas bujursangkar I = AB x AD = 10 x 10 = 100 cm^2.

Luas bujursangkar II = PQ x PS = 5√2 x 5√2 = 50 cm^2.

Rasio luas = $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

Jumlah semua bujursangkar = $\frac{a}{1-5} = \frac{150}{1-\frac{1}{2}} = 200\,\text{cm}^2$

9. Fungsi Trigonometri



Gambar 6

Pada gambar 2.4 di atas, ΔABC adalah segitiga yang salah satu sudutnya θ dan siku-siku pada $\angle$CBA. Misal AB = x, BC = y dan AC = r , berdasarkan segitiga ABC yaitu: $\frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{BC}$

Karena $\angle A$ = θ maka perbandingan tersebut dinyatakan dengan:

1. $\frac{BC}{AC} = \frac{y}{r} = \sin\theta$
2. $\frac{AB}{AC} = \frac{x}{r} = \cos\theta$
3. $\frac{BC}{AB} = \frac{y}{x} = \frac{BC/AC}{AB/AC} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
4. $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = \frac{AB/AC}{BC/AC} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot\theta$
5. $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{AB/AC} = \frac{1}{x/r} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$
6. $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{BC/AC} = \frac{1}{y/r} = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

Karena ΔABC salah satu sudutnya siku-siku, sehingga menurut teorema Pythagoras berlaku:

$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Jika persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi x^2, y^2, r^2 diperoleh persamaan baru

1. $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Lambda\ \Lambda\ \Lambda$ (1)

2. $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (2)$

3. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$

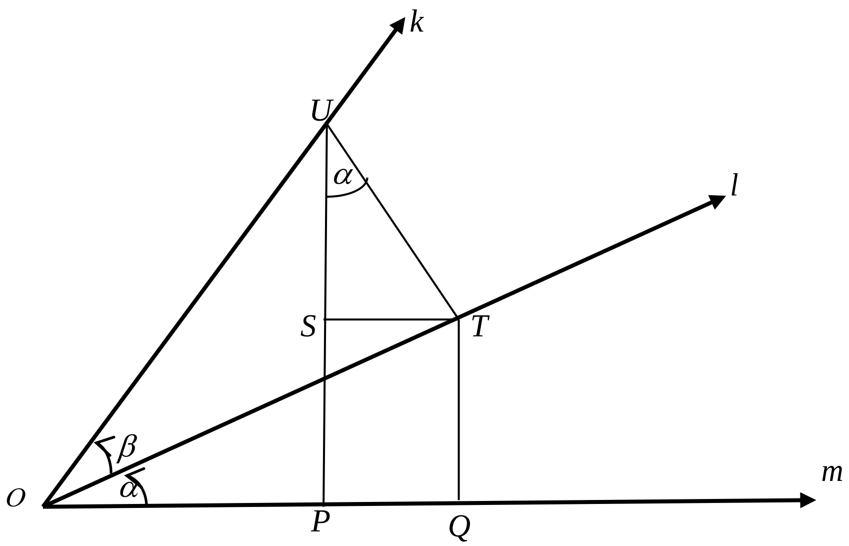
$\Leftrightarrow (\cot\theta)^2 + 1 = (\csc\theta)^2$

$\Leftrightarrow \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (3)$

Persamaan (1), (2), dan (3) dinamakan rumus-rumus identitas.

Selanjutnya berdasarkan perbandingan tersebut dapat dibuat beberapa rumus tentang fungsi trigonometri. Rumus-rumus tersebut dapat ditunjukkan melalui gambar.

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 7

Pada gambar 2.5 di atas terdapat 4 segitiga dan masing-masing adalah siku-siku, yaitu $\Delta QOT, \Delta TSU, \Delta OTU, dan\ \Delta OPU$

dan diketahui $\angle QOT = \alpha,\ \angle TOU = \beta$. $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ sehingga $\angle SUT = \alpha$

Berdasarkan ΔOPU diperoleh perbandingan panjang sisi

$\sin\angle POU = \frac{UP}{OU}$ dengan UP = PS + SU

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TUS$ maka SU = UT cos α

Karena PS = QT dan karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$

maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\sin \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{UP}{OU}$$

$$= \frac{PS + SU}{OU}$$

$$= \frac{QT + SU}{OU}$$

$$= \frac{OT \sin\alpha + UT \cos\alpha}{OU}$$

$$= \frac{OU \cos\beta \sin\alpha + OU \sin\beta \cos\alpha}{OU}$$

Sehingga diperoleh rumus $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ .... (4)

Dengan cara yang sama diperoleh:

$\cos \angle POU = \dfrac{OP}{OU}$, OP = OQ – PQ

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka SU = UT cos α

Karena PQ = ST dan karena ΔUST siku-siku di $\angle TSU$ maka ST = SU sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\cos \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{ .... (5)}}$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{OP}{OU}$$

$$= \frac{OQ - PQ}{OU}$$

$$= \frac{OQ - ST}{OU}$$

$$= \frac{OT\cos\alpha - UT\sin\alpha}{OU}$$

$$= \frac{OU\cos\beta\,\cos\alpha - OU\sin\beta\,\sin\alpha}{OU}$$

Sehingga diperoleh rumus $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$ .... (5)

Berdasarkan (4) dan (5) dapat ditentukan rumus lain

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\ &= \sin\alpha\,\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta \quad \text{...........(6)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta))\\ &= \cos\alpha\,\cos(-\beta) - \sin\alpha\,\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta \quad \text{...........(7)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β, diperoleh:

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}$ .... (8)

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β, diperoleh:

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ .... (9)

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \rightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ….(1)
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ……………………………...(2)
$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$ ……………………………...(3)
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ ......(4)
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ .... (5)
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ....(6)
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ....(7)
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ .... (8)
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ .... (9)

1. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
2. $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
3. $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
4. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
5. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
6. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
7. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

8. $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta-\cos(\alpha-\beta))\right)$

9. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

10. $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

11. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

12. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Bukti lain rumus di atas ditinggalkan penulis sebagai latihan bagi pembaca.

Soal-soal

1. Buktikan kesamaan berikut.

a. $(1+\sin x)(1-\sin x) = \dfrac{1}{\sec^2 x}$

b. $(\sec x - 1)(\sec + 1) = \tan^2 x$

c. $\sec x - \sin x \cos x = \cos x$

d. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \sin^2 x$

e. $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sec^2 x} = 1$

f. $\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$

g. $\sin 4s = 8\sin s\cos^3 s - 4\sin s\cos s$

h. $(1+\cos x)(1-\cos x) = \sin^2 x$

i. $\dfrac{\sin p}{\cos p} + \dfrac{\cos p}{\sec p} = 1$

j. $(1-\cos^2 x)(1+\cot^2 x) = 1$

k. $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$

l. $\dfrac{1-\csc^2 y}{\csc^2 y} = -\dfrac{1}{\sec^2 t}$

2. Selidiki fungsi berikut genap, ganjil, bukan genap ataupun ganjil
   a. $f(x) = \cos x + \sin x$
   b. $f(x) = \sec x$
   c. $f(x) = \cos(\sin x)$
   d. $f(x) = \sin^2 x$
   e. $f(x) = x^2 + \sin x$
   f. $f(x) = \sqrt[4]{\cos^3(x)}$
   g. $f(x) = \cos 3x$
   h. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$
   i. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
   j. $f(x) = 1 - \tan x$

10. Limit Fungsi Trigonometri

Dengan menggunakan teorema prinsip apit dan rumus geometri kita dapatkan teorema dasar dari limit fungsi trigonometri sebagai berikut.

Teorema 1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	Dalam membuktikan teorema 1 di dapatkan suatu akibat yaitu : $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$
Teorema 2 Berdasarkan teorema (1) dasar limit fungsi trigonometri dapat dibuktikan teorema-teorema berikut	
1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc \sin x}{x} = 1$	4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{arc \sin x} = 1$ 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc \tan x}{x} = 1$ 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{arc \tan x} = 1$

Bentuk-bentuk di atas dinamakan dengan limit fungsi trigonometri. Dengan berpandu pada teorema limit dan bentuk tak tentu. Maka persoalan tentang limit fungsi trigonometri dapat diselesaikan

Untuk keperluan praktis teorema tersebut dapat dikembangkan menjadi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

Seperti pada fungsi aljabar, maka pada fungsi trigonometri juga berlaku bahwa jika *f*(a) terdefinisi, maka: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin 2x + \cos x) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}}{2\sin \frac{\pi}{2} + 3\cos \frac{\pi}{2}} = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$

Berikut ini akan dibahas limit Fungsi Trigonometri bentuk tak tentu yaitu : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$

Limit Bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} = \frac{3}{4}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{3x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin x \sin x}{3x \sin x} = \frac{2}{3} \lim\limits_{x \to o} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{2\cos \frac{1}{2}(x+a) \sin \frac{1}{2}(x-a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} 2\cos \frac{1}{2}(x+a) \frac{\sin \frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} 2\cos \frac{1}{2}(x+a) \lim\limits_{x \to a} \frac{\sin \frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$

$= 2\cos \frac{1}{2}(a+a).\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \cos a$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t}$

Jawab

Bentuk di atas menghasilkan $\frac{0}{0}$ sehingga

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin(3t)}{t \sec t} + \frac{4t}{t \sec t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{t} \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sec t} + \lim_{t \to o} \frac{4}{\sec t}$$

= 3 + 4

= 7

Limit Bentuk ∞ – ∞

Limit bentuk $(\infty - \infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

Contoh :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Limit Bentuk $(0.\infty)$

Limit bentuk $(0.\infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Contoh :

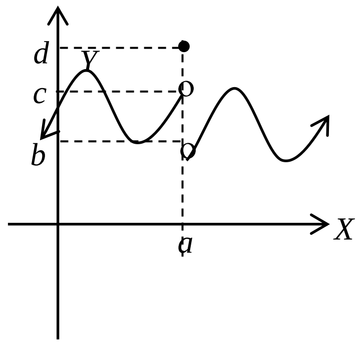
$$\lim_{x\to 1}(x-1).\tan\tfrac{1}{2}\pi x = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}\right)\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

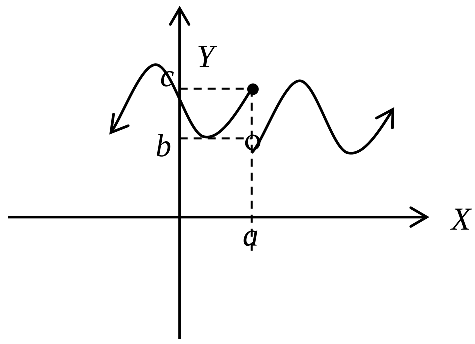
$$= \left(\frac{-2}{\pi}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

11. Kekontinuan

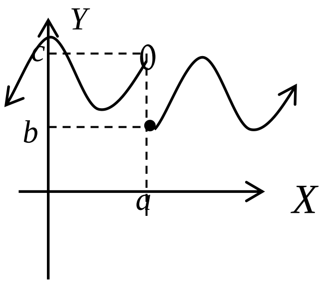
Perhatikan gambar berikut, $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi pada selang yag diberikan.



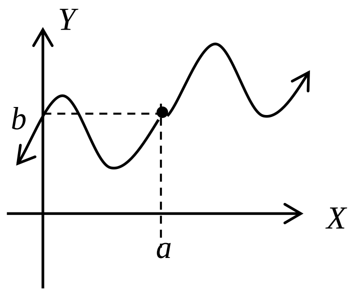
Gambar 7



Gambar 8



Gambar 9



Gambar 10

Selanjutnya menurut

Gambar 7

a) f(a) = d

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 8

a) f(a) = c

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 9

a) f(a) = b

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 10

a) f(a) = b

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = b$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,\ karena\ L^+ = L^-$

Definisi

Jika $y = f(x)$ terdefinisi dalam suatu selang terbuka yang memuat c, maka $y = f(x)$ dikatakan kontinu di x = c, asalkan

1) f(c) = L (*ada*)
2) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L\ (ada)$
3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = L\ (ada)$

Contoh

Nyatakan apakah fungsi-fungsi berikut kontinu di titik yang diberikan:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ di titik x = 3

   Jawab

   Untuk menyelidiki apakah $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di titik x = 3 maka harus ditunjukkan bahwa 3 syarat kontinu fungsi di satu titik harus terpenuhi.

   Ternyata untuk $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ fungsi tidak terdefinisi di x = 3, sehingga

   $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ tidak kontinu di x = 3.

2. $f(x) = \begin{cases} x, \; untuk \;\; x < 0 \\ x^2, \; untuk \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \; untuk \;\; x > 1 \end{cases}$ di setiap titik pada bilangan real

Jawab

Untuk menyelidiki apakah fungsi di atas kontinu di R, maka cukup diselidiki apakah $f(x)$ kontinu di titik $x = 0$ atau $x = 1$

Pada $x = 0$

1) $f(0) = 0^2 = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, tentukan terlebih dahulu $L^+ = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$

Sedangkan $L^- = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$.

Karena $L^- = L^+$ maka $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3) $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Hal ini menunjukkan bahwa $f(x) = \begin{cases} x, \; untuk \;\; x < 0 \\ x^2, \; untuk \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \; untuk \;\; x > 1 \end{cases}$ kontinu di x = 0

Pada $x = 1$

1) $f(1) = 1^2 = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, tentukan terlebih dahulu $L^+ = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x) = 2 - 1 = 1$

Sedangkan $L^- = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

Karena $L^- = L^+$ maka $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

3) $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Hal ini menunjukkan bahwa $f(x) = \begin{cases} x, \; untuk \;\; x < 0 \\ x^2, \; untuk \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \; untuk \;\; x > 1 \end{cases}$ kontinu di x = 1

Karena $f(x)$ kontinu di $x = 0$ dan $x = 1$

Berarti

$f(x) = \begin{cases} x, \; untuk \;\; x < 0 \\ x^2, \; untuk \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \; untuk \;\; x > 1 \end{cases}$ kontinu dimana-mana.

3. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di $x = 1$

   Jawab :

   1) $f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow$ *f*(1) terdefinisi

   2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + x - 3\right) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ terdefinisi

   3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ Jadi fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di x =1.

4. Selidiki apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di x = 3

   Jawab :

   1) $f(3) = \dfrac{3^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$ (tidak tentu)

   Karena *f*(3) tak tentu maka $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ diskontinu di x = 3

5. Selidiki apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

   kontinu di x = 2

   Jawab :

   1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, f(2) = \dfrac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7$ (terdefinisi)

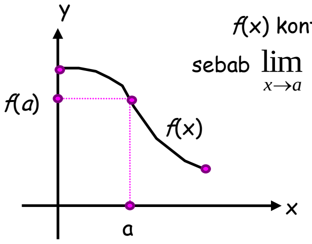
   2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + x + 1\right) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

      (terdefinisi)

   3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, berarti $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ diskontinu di $x = 2$

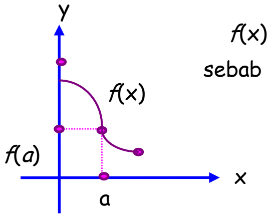
6. Selanjutnya perhatikan gambar berikut :

   1.



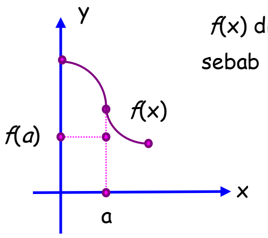
   f(x) kontinu di x = a,
   sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

   2.



   f(x) diskontinu di x = a,
   sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tidak ada

3.



$f(x)$ diskontinu di $x = a$,
sebab $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Gambar 11

Soal-soal

1. Selidiki apakah fungsi berikut kontinu atau diskontinu di titik yang diberikan.

   a. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x}$ *di titik* $x = 0$

   b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2 - x}}$ *di titik* $x = 1$

   c. $f(x) = \begin{cases} x - 1, \textit{ untuk } x < 0 \\ 2x^2, \textit{ untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x^2, \textit{ untuk } x > 1 \end{cases}$ *di titik x = 0 dan di x= 1*

2. Diketahui f(x) = $[x]$ untuk $-2 \le x \le 3$, selidiki apakah f(x) kontinu di x = -1 dan 2.

3. Tentukan nilai a dan b sedemikian sehingga

$$f(x) = \begin{cases} -1, \textit{ untuk } x \le 0 \\ ax + b, \textit{ untuk } 0 < x < 1 \\ 1, \textit{ untuk untuk } x \ge 1 \end{cases}$$

kontinu dimana-mana.

Bahan UTS

1. Tentukan daerah asal alamiah dan selang (range),dan daerah hasil dari f(x)

   misalnya : $f(x) = 2 + \sqrt{2x - 1}$

2. Diberikan f(x) dan g(x) tentukanlah: $f(x) - g(x)$ $f(x).g(x)$, $(g \circ f)(x)$ dst

   misal : $f(x) = 2 + \sqrt{2x - 1}$ dan $g(x) = x^2 - 1$

3. Menghitung limit, misalnya :

$$\lim_{t \to -1} \frac{\sqrt{1-2t}}{(3t+2)}$$

4. menyelidiki kekontinuan fungsi di titik yang diberikan dan gambar kurvanya, misalnya

   $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ di x = 1

5. Buktikan kesamaan trigonometri, misalnya : $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \dfrac{1}{\sec^2 x}$

6. menghitung fungsi laju perubahan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$