Universitas Esa Unggul Kampus Harapan Indah	MODUL V **Matematika**	
Judul	**BENTUK- BENTUK ALJABAR**	
Penyusun	**Distribusi**	**Perkuliahan**
Nixon Erzed	PAMU UNIVERSITAS ESA UNGGUL	Pertemuan – V online

Tujuan :

Memahami bentuk-bentuk aljabar, persamaan, pertidaksamaan, sistem koordinat dan penggunaannya dalam pemecahan masalah

Materi:

1. Bentuk Aljabar dan Faktorisasi
2. Garis Bilangan dan Selang
3. Nilai Mutlak dan pertidaksamaan dengan nilai mutlak
4. Sistem Koordinat Kartesius
5. Kurva Persamaan dan Pertidaksamaan dalam koordinat kartesius

BENTUK-BENTUK ALJABAR

Bentuk aljabar adalah suatu bentuk matematika yang dalam penyajiannya mengkombinasikan kooefisien dan variabel. Variabel berupa huuruf untuk mewakili bilangan yang belum diketahui. Bentuk aljabar dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Hal-hal yang tidak diketahui seperti banyaknya bahan bakar minyak yang dibutuhkan sebuah bis dalam tiap minggu, jarak yang ditempuh dalam waktu tertentu, atau banyaknya makanan ternak yang dibutuhkan dalam 3 hari, dapat dicari dengan menggunakan aljabar.

Bentuk Perpangkatan

Misalkan a sebuah bilangan real,

(a). $a^2 = axa;\quad a^3 = axaxa\quad ;\quad \underbrace{a^n = axaxax\ldots xa}_{\text{n faktor}}\quad ,\ n \in N$

(b). Untuk $a \neq 0$ berlaku

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad ; \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Contoh : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$.

Untuk setiap bilangan real a dan b yang tidak nol dan untuk setiap bilangan bulat p dan, n maka :

(a)	$a^n.a^p$	=	a^{n+p}
(b)	$(a^n)^p$	=	a^{np}
(c)	$(ab)^n$	=	$a^n.b^n$
(d)	$\frac{a^n}{a^p}$	=	a^{n-p}
(e)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	=	$\frac{a^n}{b^n}$

Contoh	*	$2^3 x 2^2$	=	2^5	=	32
	*	$(2^2)^3$	=	2^6	=	64
	*	$(2x5)^3$	=	$2^3 x 5^3$	=	1000
	*	$\frac{3^2}{3^3}$	=	3^{-1}	=	$\frac{1}{3}$
	*	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	=	$\frac{3^3}{2^3}$	=	$\frac{27}{8}$

Kesamaan Istimewa

Misal $a, b \in R$, maka :

(a). $(a+b)^2 = a^2 + 2.ab + b^2$

Contoh : $(n+3)^2 = n \;\; + 2.3.n + 9 = n \;\; + 6n + 9$

(b). $(a-b)^2 = a^2 - 2.ab + b^2$

Contoh : $(4x-5)^2 = 16x - 40x + 25$

(c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Contoh : $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

(d). $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Contoh : $(2x-4y)^3 = 8x^3 - 48x^2y + 72xy^2 - 64y^3$

Bentuk Akar:

Sifat-Sifat Bilangan Bentuk Akar Kuadrat
Misal a dan b bilangan real positif, maka :

(a). $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

Contoh : $\sqrt{12} = \sqrt{4x3} = \sqrt{4}x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(b). $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Contoh : $\sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(c). $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

Contoh : $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Definisi

a) Akar Kuadrat dari bilngan positif a ditulis $\sqrt{a}$, dideenisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^2 = a$. Dengan kata lain, $\sqrt{a}$ satu-satunya bilangan real positif yang memenuhi $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Contoh. :

- ❖ $\sqrt{25} = 5$, karena 5 adalah bilangan positif yang memenuhi $x^2 = 25$.
- ❖ $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, karena 2 adalah bilangan positif yang memenuhi $x^2 = 4$.

b) Akar kubik dari bilangan real a, ditulis $\sqrt[3]{a}$, didefenisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^3 = a$. Contoh :

- ❖ $3\sqrt{8}$ = 2, karena 2 adalah bilangan real yang memenuhi $x^3 = 8$
- ❖ $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$, karena $\dfrac{2}{3}$ adalah bilangan real yang M emenuhi $x^3 = \dfrac{8}{27}$
- ❖ $\sqrt[3]{(-27)} = -3$, karena -3 adalah bilangan real yang memenuhi $x^3 = -27$

c) Jika " n bilangan genap positif", akar ke –n dari bilangan positif a, ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefenisikan sebagai bilangan positif x yang memenuhi $x^n = a$

Contoh : $\sqrt[4]{81} = 3$, karena 3 bilangan positif yang memenuhi $x^4 = 81$

d). Jika "n bilangan ganjil positif", n > 1, akar ke-n dari bilangan real a, ditulis $\sqrt[n]{a}$, didefenisikan sebagai bilangan real x yang memenuhi $x^n = a$

Contoh : $\sqrt[5]{(-32)} = -2$, karena -2 bilangan real yang memenuhi $x^5 = -32$.

PENGURAIAN DAN FAKTORISASI

Defenisi

(a). “Penguraian” adalah suatu transformasi bentuk perkalian ke dalam bentuk jumlahan

Contoh : $(2x-3)(x+1) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$

(b). “Faktorisasi” adalah suatu transformasi bentuk jumlahan ke dalam bentuk perkalian.

Contoh : $2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x(x^2 + 3x - 4) = 2x(x+4)(x-1)$

Untuk memfaktorkan sebuah jumlah dapat ditempuh berbagai cara:

(i). Kita dapat membuat faktor bersama pada setiap suku jumlahan.

Contoh : $y = 8x^5 - 13x^2 + 24x$

$= 8x^4.x - 13x.x + 24.x = x(8x^4 - 13x + 24)$.

(ii). Kita dapat menggunakan kesamaan istimewa :

Contoh : $y = 9x^2 + 12x + 4$

= $(3x)^2 + 2.(3x).2 + 2^2$, ingat bentuk $(a+b)^2$

$y = (3x+2)^2$

(iii). Gabungan metode (i) dan (ii) dan berbagai manipulasi aljabar

Contoh

$$
\begin{aligned}
y &= 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 \\
&= 4x^2.x^2 - 12x.x^2 + 9x^2 \\
&= x^2(4x^2 - 12x + 9) \\
&= x^2\left[(2x)^2 - 2.(2x).3 + 3^2\right], \text{ ingat bentuk } (a-b)^2 \\
y &= x^2(2x-3)^2
\end{aligned}
$$

Berikut ini ditunjukkan beberapa cara menguraikan suatu bentuk aljabar atas faktor-faktor linier dan/atau kuadrat definit-positif. Dengan berbagai teknik manipulasi aljabar diperoleh uraian berikut:

a). $x^2 - a^2 = x^2 + (ax - ax) - a^2$ tambahkan dan kurangkan faktor ax

$= (x^2 + ax) - (ax + a^2)$ kumpulkan faktor-faktor yang sesuai

$= x(x+a) - a(x+a)$ keluarkan faktor yang sama

Sehingga diperoleh faktorisasinya

$$\boxed{x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)}$$

b). $x^3 - a^3 = x^3 + (ax^2 - ax^2) + (a^2x - a^2x) - a^3$

$= (x^3 - ax^2) + (ax^2 - a^2x) + (a^2x - a^3)$

$= x^2(x-a) + ax(x-a) + a^2(x-a)$

$= (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

$$\boxed{x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)}$$

c) $x^3 + a^3 = x^3 + \left(ax^2 - ax^2 + a^2x - a^2x\right) + a^3$

$= \left(x^3 + ax^2\right) - \left(ax^2 + a^2x\right) + \left(a^2x + a^3\right)$

$= x^2\left(x+a\right) - ax(x+a) + a^2(x+a)$

$$\boxed{x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)}$$

d). $x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = (x^2 + a^2)(x-a)(x+a)$

e). $x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2x^2a^2 = (x^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ax)^2$

$= (x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 - \sqrt{2ax})$

$$\boxed{x^4 + a^4 = (x^2 + \sqrt{2ax} + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2).}$$

Definit Positif dan Definit Negatif

Bentuk kuadrat ax^2+bx+c; dengan $a \neq 0$, dikatakan bersifat "definit positif" bilamana nilainya <u>selalu positif</u> $\forall x \in R$.

Perhatikan bahwa :

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) \qquad \text{dimana } a \neq 0$$

$$= a(x+\frac{b}{2}a)^2 - \frac{(b^2-4ac)}{4a}$$

$= a(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{D}{4a}$, dimana $D = b^2 - 4a.c$ disebut deskriminan

maka bentuk kuadrat $ax^2+bx+c, a \neq 0$ bersifat definitive positif jika dan hanya jika a>0 dan D<0.

Contoh:

Bentuk kuadrat x^2-2x+3 adalah definit positif' karena a = 1>0 dan D = 4 – 12 = - 8 < 0.

Untuk pemahaman

1) Berikan defenisi bentuk kuadrat yang definit negative dan tentikan syarat-syaratnya , kemudian berikan contohnya.

   bentuk kuadrat $ax^2+bx+c, a \neq 0$ bersifat definitive negatif jika dan hanya jika a < 0, c<0 dan D<0.

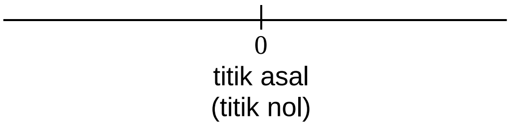
2) Uraikan bentuk $x^6 - a^6 dan\ x^6 + a^{6.}$

Garis Bilangan Dan Selang (Interval)

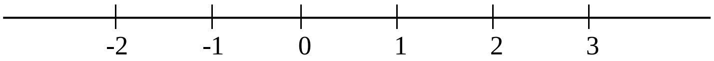
Hal-hal mengenai bilangan real yang telah dibicarakan diatas dapat diberikan interpretasi geometri, dengan mengkaitkan bilangan real dengan titik-titik pada sebuah garis.

Setiap bilangan real dapat digambarkan sebagai titik pada garis, dan setiap titik pada garis dapat dinyatakan sebagai representasi bilangan real. Hal ini berarti terdapat "korespondensi satui-satu" diantara bilangan real dan titik pada garis. Diantara dua bilangan real terdapat tak hingga banyaknya bilangan rasional dan irrasional. Akibatnya, kita dapat menggambarkan bilangan real R sebagai himpunan titik sepanjang suatu garis lurus, yang dikenal sebagai "garis bilangan real", lihat gambar berikut :

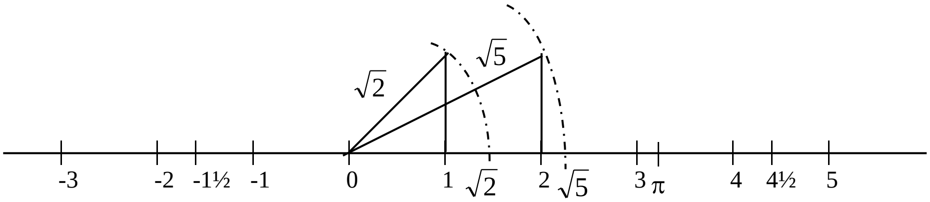
* mula-mula kita meletakkan titik 0 sebagai titik asal (origin),



* selanjutnya kita dapat memilih suatu titik sembarang disebelah kiri atau kanan titik asal yang mempunyai jarak tertentu dari titik asal



* akhirnya kita dapat menggambarkan setiap bilangan real (rasional maupun irrasional) yang kita kehendaki pada garis bilangan.



Catatan

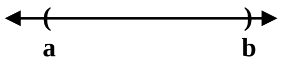
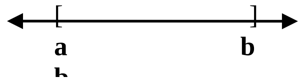
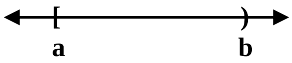
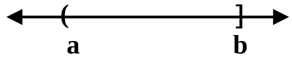
Perhatikan bahwa bilangan real positif terletak disebelah kanan titik 0, dan bilangan real negatif terletak disebelah kiri titik 0.

Selang Hingga Dan Selang Tak Hingga

Sekarang kita defenisikan himpunan bilangan real yang memenuhi suatu pertaksamaan tertentu, yang dikenal sebagai “selang hingga” dan “selang tak hingga”.

- “Selang hingga” adalah himpunan bagian tak kosong dari R yang terbatas diatas dan dibawah.
- “Selang tak hingga” adalah tidak terbatas diatas atau dibawah.

Berikut ini diberikan defenisi selang (interval) sebagai himpunan titik dan representasinya pada garis bilangan.

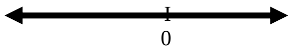
SELANG (INTERVAL) HINGGA			
No	Pertaksamaan yang dipenuhi bil real x	Selang sebagai himpunan titik	Representasi selang pada garis bilangan.
1	$a < x < b$	$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$	
2	$a \le x \le b$	$[a,b] = \{x \in R; a \le x \le b\}$	
3	$a \le x < b$	$[a,b) = \{x \in R, a \le x < b\}$	
4	$a < x \le b$	$(a,b] = \{x \in R; a < x \le b\}$	

Catatan :

- Selang yang tidak memuat kedua titikujungnya dinamakan “selang terbuka”
- Selang yang memuat sekaligus kedua titik ujungnya dinamakan “selang tertutup”
- Selang yang hanya memuat salah satu ujungnya dinamakan “selang setengah tutup/buka”.

Untuk selang tak hingga digunakan lambang ∞ dan -∞ yang memenuhi relasi urutan $-\infty < x < \infty$ untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan hal tersebut, lambang ∞ digunakan untuk suatu yang lebih besar dari setiap bilangan real (membesar tanpa batas) dan lambing $-\infty$ digunakan untuk sesuatu yang lebih kecil dari setiap bilangan real (mengecil tanpa batas).

Kedua lambang ini (∞ dan -∞) bukan bilangan real.

SELANG TAK HINGGA			
No.	Pertaksamaan yang dipenuhi bil real x	Selang sebagai Himpunan Titik	Representasi Selang pada garis bilangan
1	$x < b$	$(-\infty, b) = \{x \in R, x < b\}$	
2	$x \le b$	$(-\infty, b] = \{x \in R, x \le b\}$	
3	$x > a$	$(a, \infty) = \{x \in R, x > a\}$	
4	$x \ge a$	$[a, \infty) = \{x \in R, x \ge a\}$	
5	$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty) = R$	
Catatan ; Selang $(-\infty, b)$ dan (a, ∞) adalah selang terbuka Selang $(-\infty, b]$ dan $[a, \infty)$ adalah selang setengah tutup			

Gabungan Dan Irisan Dua Buah Selang

Misalkan $I_2 = (-1,3]$ dan $I_3 = (2, \infty]$,

maka gabungan I2 dan I3 adalah $I_2 \cup I_3 = (-1,3] \cup [2, \infty) = (-1, \infty)$

Irisan I2 dan I3 adalah $I_2 \cap I_3 = (-1,3] \cap [2, \infty) = [2,3]$.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

$I_2 = (-1,3]$

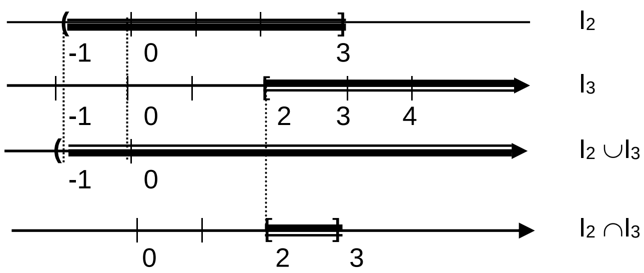
$I_3 = [2, \infty)$

maka

$I_2 \cup I_3 = (-1, \infty)$

dan

$I_2 \cap I_3 = [2,3]$

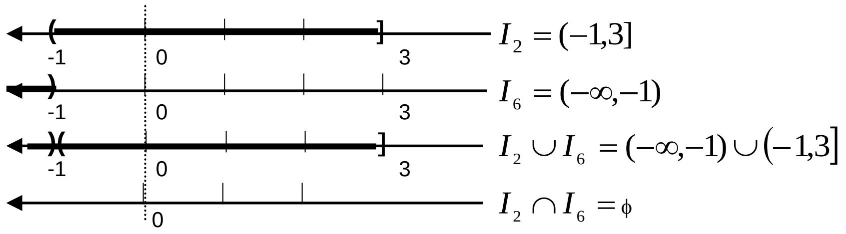


Dengan cara yang sama diperoleh:

$I_2 \cup I_6 = \left(-1,3\right] \cup \left(-\infty,-1\right) = \left(-\infty,-1\right) \cup (-1,3]$

(titik -1 tidak masuk angota gabungan) dan

$I_2 \cap I_6 = \left(-1,3\right] \cup \left(-\infty,-1\right] = \Phi$ (himpunan kosong) lihat gambar



Pertaksamaan

Perhatikan aksioma urutan bilangan real berikut :

(i). $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$

(ii). $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow b - a < 0$

(iii). Tepat satu dan hanya satu diantara ketiga kalimat berikut yang benar : $a < b$ atau $a = b$ atau $a > b$

Kalimat-kalimat matematika yang berbentuk $a < b$; $c \le d$; $e > f$ dan $g \ge h$ dinamakan "ketidaksamaan (pertaksamaan)".

Kalimat terbuka 2x -1 < 7 adalah <u>benar</u> untuk beberapa bilangan real tertentu, dan <u>tidak benar</u> untuk bilangan -bilangan real lainnya. Misalnya, apabila bilangan real 3 disubtitusikan untuk x maka kalimat tersebut menjadi benar yaitu 6 – 1 < 7 adalah benar, akan tetapi jika bilangan real 6 disubtitusikan untuk x, maka kalimat tersebut menjadi 12 – 1 < 7 yang <u>tidak benar</u>.

Himpunan semua bilangan real x yang memenuhi pertaksamaan (yaitu yang membuat kalimat pernyataan itu benar) dinamakan "himpunan penyelesaian (solusi) pertaksamaan".

Bentuk umum pertaksamaan aljabar satu peubah real adalah
$\frac{M(x)}{N(x)} < \frac{R(x)}{S(x)}$, M, N, R, S adalah suku banyak (polinom).

Catatan : Tanda < dapat diganti oleh >, $\ge$ atau $\le$

Prosedur/langkah-langkah baku menyelesaikan pertaksamaan ini adalah sebagai berikut :

(i). Dengan rumus aljabar elementer dan urutan, ubahlah bentuknya menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, dengan P, Q suku banyak.

(ii). Uraikan P dan Q atas faktor-faktor linier dan/atau kuadrat definit positif.

(iii). Tentukan tanda pertidaksamaan pada garis bilangan.

(iv). Tentukan himpunan penyelesaiannya, dan tampilkan dalam bentuk selang.

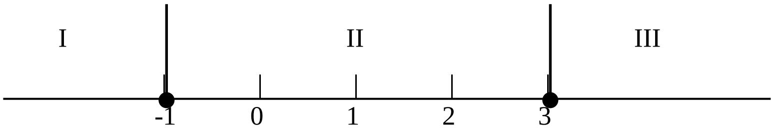
<u>Catatan</u> : Jika uraian P dan Q atas faktor-faktornya sukar dikerjakan, langkah kedua dapat saja dilewati, asalkan tanda pertaksamaannya pada garis bilangan untuk P dan Q dapat ditentukan. Dalam beberapa kasus khusus, prosedur baku ini tidak perlu harus digunakan.

Contoh. 1.

Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan $x^2 < 2x + 3$

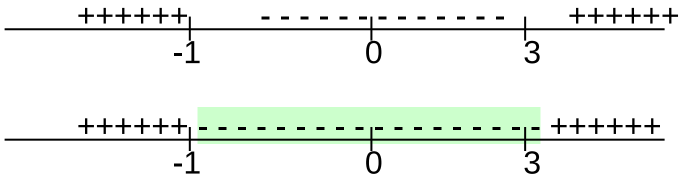
Solusi

$$x^2 < 2x+3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0$, titik-titik nolnya adalah x = -1 dan x = 3



\# dalam hal ini, garis bilangan terbagi atas tiga daerah yaitu daerah I, II dan III.

\# uji tanda pertaksamaan, dapat dipilih sembarang nilai x pada tiap daerah (asalkan tidak memilih titik-titik nolnya).
Misalkan kita pilih x=0 pada daerah II, maka diperoleh tanda pertaksamaan adalah negatif, karena (0+1) (0-3) = -3<0. Jadi pada daerah II diberi tanda negatif (-), pada daerah I dan III diberi tanda positif (+).



Berdasarkan tanda pertidaksamaan diatas adalah negatif (<0) maka himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir :

$$(-1{,}3) = \{x \in R : -1 < x < 3\}$$

Catatan :
Pertidaksamaan diatas selalu benar apabila x disubtitusikan bilangan real antara -1 dan 3, dan akan bernilai salah dalam hal lainnya.

<u>Contoh . 2</u>

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{3}{x} \geq x+2$

<u>Solusi</u>

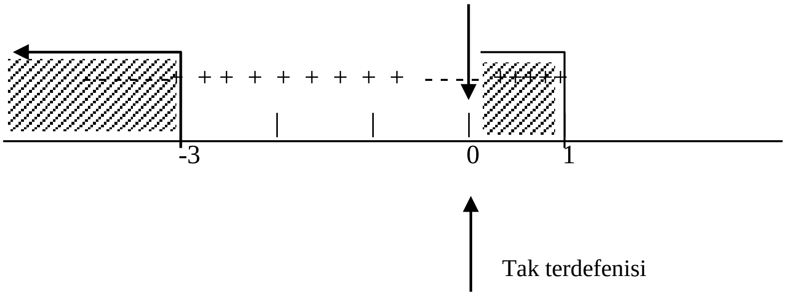
$$\frac{3}{x} \geq x+2$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2 \leq \frac{3}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2 - \frac{3}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x-3}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-1)}{x} \leq 0, \qquad x \neq 0$$



$\therefore$ Himpunan penyelesaian $= (-\infty,-3] \cup (0,1]$

$= \{x \in R : x \leq -3$ atau $0 < x \leq 1\}$

<u>Contoh. 3</u>

Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan :

a). -3 <4x -9 <11

b). $2 < x^2 - x \leq 6$

c). $\frac{x}{x+3} \leq \frac{x+1}{2-x}$

d). $3x^2 - 11x - 4 < 0$

<u>Solusi :</u>

a. $-3 < 4x - 9 < 11 \;\Leftrightarrow\; -3 < 4x - 9$ dan $4x - 9 < 11$

$-3 < 4x - 9$ dan $4x - 9 < 11$

$-3 + 9 < 4x$ dan $4x < 11 + 9$

$6 < 4x$ dan $4x < 20$

$\boxed{\frac{3}{2} < x}$ dan $\boxed{x < 5}$

$\boxed{\frac{3}{2} < x < 5}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\frac{3}{2}, 5\right) = \left\{x \in R : \frac{3}{2} < x < 5\right\}$

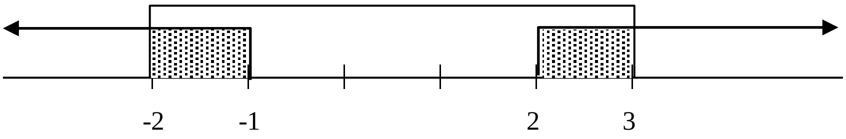
b. $2 < x^2 - x \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < x^2 - x$ dan $x^2 - x \le 6$

$2 < x^2 - x$ dan $x^2 - x \le 6$

$x^2 - x - 2 > 0$ dan $x^2 - x - 6 \le 0$

$(x+1)(x-2) > 0$ dan $(x+2)(x-3) \le 0$

$(x < -1$ atau $x > 2)$ dan $(-2 \le x \le 3)$



$\therefore$ Himpunan penyelesaiannya adalah irisan $(x < -1$ atau $x > 2)$ dengan $(-2 \le x \le 3)$

yaitu : $\left((-\infty, -1) \cup (2, \infty)\right) \cap [-2, 3] = (-2, 1) \cup (2, 3]$

$= \{x \in R : -2 \le x < -1$ atau $2 < x \le 3\}$.

c). $\dfrac{x}{x+3} \leq \dfrac{x+1}{2-x}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+3} - \frac{x+1}{2-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(2-x)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(2-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+2x+3}{(x+3)(2-x)} \geq 0$$

Karena pembilang $(2x^2+2x+3)$ definit positif (bernilai positif untuk setiap x), maka pertaksamaan ini setara dengan :

$\dfrac{1}{(x+3)(2-x)} \geq 0$, dalam hal ini $x \neq 3; \quad x \neq 2$

$\therefore$ Himpunan Penyelesaiannya : (-3,2) = { x $\in \Re$: -3 < x < 2 }

d). $3x^2 - 11x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow$ (3x +1) (x – 4) <0

Jadi tanda (3x + 1) dan tanda (x – 4) harus <u>berbeda.</u>

<u>Kasus I</u>. Misal 3x +1 < 0 dan x-4 >0

Berarti x < $-\dfrac{1}{3}$ dan x > 4...

Tetapi tidak mungkin ada bilangan real x yang kurang dari $-\dfrac{1}{3}$ dan sekaligus lebih dari 4. jadi kasus I tidak mungkin. (dengan kata lain irisannya ϕ).

<u>Kasus II.</u> Misal 3x +1 > 0 dan x – 4 < 0

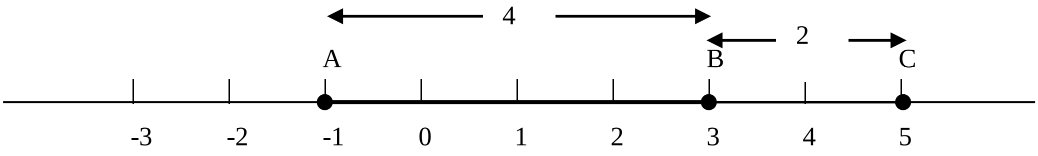
berarti x > $-\dfrac{1}{3}$ dan x < 4

sehingga :

Himpunan penyelesaiannya : $\left(-\dfrac{1}{3},4\right)$ = $\left\{x \in R : -\dfrac{1}{3} < x < 4\right\}$

<u>Nilai Mutlak</u>

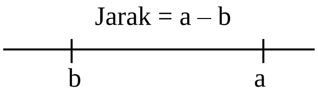
Sebelum kita membahas konsep "nilai mutlak", perhatikan dahulu konsep jarak antara dua titik pada garis bilangan berikut :



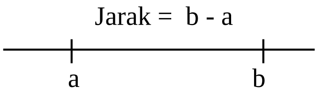
dari gambar 2. terlihat bahwa :
- jarak dari titik A ke B adalah 3- (-1) = 4 dan
  jarak dari titik B ke C adalah 5 - 3 = 2.

Secara umum perhatikan kasus berikut :

* jarak titik b ke titik a adalah $\boxed{\text{a-b, jika a > b}}$



* jarak tititk a ke titik b adalah $\boxed{\text{b –a , jika b > a}}$



* jarak titik a ke titik b adalah $\boxed{\text{0, jika a=b}}$

Dari kenyataan tersebut diatas dapat disimpulkan sebagai berikut :

jarak titik a ke titik b pada garis bilangan adalah

$$d(a,b) = \begin{cases} a-b, \ jika \ \ a > b \\ 0 \quad\ \ , \ jika \ \ a = b \\ b-a, \ jika \, a < b \end{cases}$$

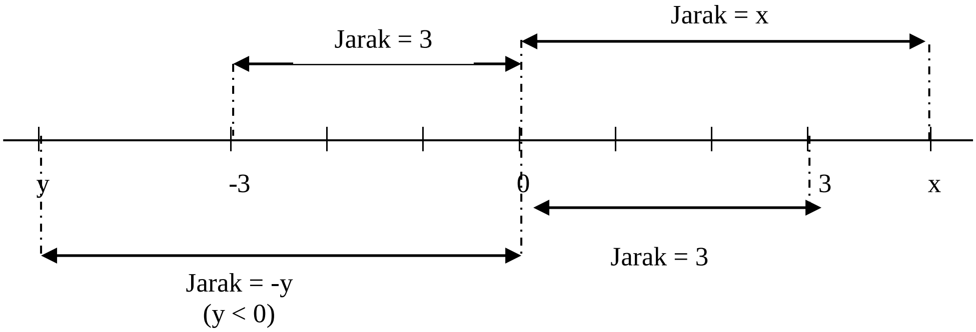
kasus khusus terjadi bila b = 0, maka jarak dari titik a ke 0 adalah :

$$d(a,0) = \begin{cases} a, \ jika \ a > 0 \\ 0, \ jika \ a = 0 \\ -a, \ jika \ a < 0 \end{cases}$$

atau disingkat dengan :

$$d(a,0) = \begin{cases} a, \ jika \ a \geq 0 \\ -a, \ jika \ a < 0 \end{cases}$$

Konsep nilai mutlak dari bilangan real x mempunyai arti geometri sebagai jarak dari x ke 0 pada garis bilangan, sehingga 'nilai mutlak" dapat digunakan sebagai ukuran jarak antara dua bilangan (titik) pada garis bilangan real, perhatikan gambar 3.



dari gambar diatas, dapat disimpulkan bahwa :

1). jarak dari 2 ke 0 adalah : d (2,0) = 2 – 0 = 2
jarak dari -2 ke 0 adalah : d (-2,0) = 0 – (-2) = 2

2). jika x > 0, jarak dari x ke 0 adalah d(x,0) = x – 0 = x
jika y < 0, jarak dari y ke 0 adalah d (y ,0) = 0 – y = -y,
dalam hal ini (-y) adalah bilangan positif, karena y < 0.

3). dari kenyataan ini menunjukkan bahwa jarak dari x ke 0 adalah x, jika x $\geq$ 0, dan jarak dari x ke 0 adalah –x, jika x <0, yang dapat dituliskan dalam bentuk

$$d(x,0) = \begin{cases} x, \ jika \, x \geq 0 \\ -x, \ jika \, x < 0 \end{cases}$$

Defenisi

"Nilai Mutlak" (nilai absolut) dari bilangan real x , ditulis $|x|$, dan didefinisikan sebagai : $\boxed{|x| = \begin{cases} x, \; jika \;\; x \geq 0 \\ -x, \; jika \;\; x < 0 \end{cases}}$

x = 0

\- | + + + + + + + + + + + + + + + + +

x < 0	0	x > 0
|x| = - x		|x| = x

perhatikan gambar diatas titik 0 membagi garis bilangan atas dua daerah yaitu x ≥ 0 dan x < 0.

Pada daerah $x \geq 0$ berlaku $|x| = x$ dan pada daerah $x < 0$ berlaku $|x| = -x$. Dalam hal ini $|x|$ berganti tanda di titik 0.

Contoh 1. $|-2| = -(-2) = 2$; $|3| = 3$; $|0| = 0$

$$|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3} \qquad karena \quad 2 > \sqrt{3}$$

$|\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2),$ $\quad karena \;\; \sqrt{3} < 2$, tetapi hasil ini sama dengan $2-\sqrt{3}$.

Contoh 2.

Ubahlah bentuk nilai mutlak berikut ke dalam bentuk tanpa nilai mutlak $a).|x-3|$ $;b).\ |2x-5|$

Solusi :

a). Besaran $|x-3|$ ini berubah tanda di $x = 3$.

Jika $x \geq 3,$ maka $x-3 \geq 0$, sehingga $|x-3| = x-3$

Jika $x < 3,$ maka $x-3 < 0$, sehingga $|x-3| = 3-x$

Sehingga hasilnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, \;\; jika \;\; x \geq 3 \\ 3-x, \;\; jika \;\; x < 3 \end{cases}$$

atau dinyatakan dalam gambar sebagai berikut :

3

$x < 3$	$x \geq 3$
$\|x-3\| = x-3$	$\|x-3\| = 3-x$

b) Besaran $|2x-5|$ berganti tanda di $x=\frac{5}{2}$

Jika $x \ge \frac{5}{2}$ maka $2x-5 \ge 0$, sehingga $|2x-5| = 2x-5$

Jika $x < \frac{5}{2}$ maka $2x-5<0$, sehingga $|2x-5| = 5-2x$

Sehingga hasilnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & jika\ x \ge \frac{5}{2} \\ 5-2x, & jika\ x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ingat kembali bahwa $\sqrt{a}$ dengan $a \ge 0$, adalah bilangan real tak negatif, kuadratnya adalah a. Jadi $\sqrt{9}=3$ bukan ± 3, dan $-\sqrt{9}=-3$

Berdasarkan hal ini, kaitan antara bentuk akar dengan nilai mutlak adalah sebagai berikut ;

Untuk setiap bilangan real x, berlaku : $\boxed{\sqrt{x^2}=|x| \quad dan \quad |x|^2 = x^2}$

Contoh: $\sqrt{2^2}=2$; $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$ dan $|-3|^2=(-3)^2=9$

Sifat-Sifat Nilai Mutlak

<u>*Teorema 1*</u>

1). Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku :

a). $|x| \ge 0$ e). $|x|=|y| \Leftrightarrow x=\pm y \Leftrightarrow x^2=y^2$

b). $|x|=|-x|$ f). $|x-y|=|y-x|$

\- c). $-|x| \le x \le |x|$ g). $|xy|=|x|\,.\,|y|$

d). $|x|^2=|x^2|=x^2$ h). $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ \ y\ne 0$

2). Untuk setiap bilangan real x dan jika $a \ge 0$, maka berlaku :

a). $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x^2 \le a^2$

b). $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a \quad atau \quad x \le -a \Leftrightarrow x^2 \ge a^2$

3). Ketaksamaan segitiga. Untuk setiap bilangan real x dan y, berlaku ;

a). $|x+y| \le |x|+|y|$ c). $|x|-|y| \le |x-y|$

b). $|x-y| \le |x|+|y|$ d). $||x|-|y|| \le |x-y|$

Berikut ini diberikan bukti untuk beberapa bagian saja, selebihnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Bukti 1). g. $|xy| = |x|.|y|$

$$|x|.|y| = \sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2y^2} = |xy|.$$ terbukti

Bukti 3) .a. $|x+y| \le |x| + |y|$

dari teorema 1.c. $-|x| \le x \le |x|$ *dan* $-|y| \le y \le |y|$

sehingga $-(|x|+|y|) \le x + y \le (|x|+|y|).$

dari 2.a. sehingga diperoleh $|x+y| \le |x| + |y|$ terbukti.

Bukti 3).b. $|x-y| \le |x| + |y|$

$|x-y| = |x+(-y)| \le |x| + |-y| = |x| + |y|$ terbukti

Bukti 3). c. $|x| - |y| \le |x-y|$

Pembuktian $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$, sehingga

$|x| - |y| \le |x-y|$ terbukti.

__Teorema Akibat 1__

1). Andaikan x dan a adalah bilangan real sembarang maka

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & jika\ x \ge a \\ a-x, & jika\ x < a \end{cases}$$

a	
$x < a$	$x \ge a$
$\lvert x-a\rvert = a - x$	$\lvert x-a\rvert = x - a$

2). Jika $b \ge 0$, serta x dan a bilangan real, berlaku

a. $|x-a| \le b \Leftrightarrow -b \le x - a \le b \Leftrightarrow a - b \le x \le a + b$

b. $|x-a| \ge b \Leftrightarrow x - a \ge b$ *atau* $x - a \le a - b$

yang dapat ditulis sebagai $x \ge a + b$ *atau* $x \le a - b$

__Catatan__

Langkah-langkah penyelesaian pertaksamaan yang memuat nilai mutlak adalah sebagai berikut :

- Ubahlah bentuk pertaksamaan sehingga tidak memuat lagi nilai mutlak.
- Selesaikan pertaksamaan yang muncul pada setiap kasus. untuk itu kita dapat menggunakan sifat-sifat nilai mutlak (teorema akibat) atau mengkuadratkan bentuk pertaksamaan dengan nilai mutlak bila syaratnya terpenuhi.

Contoh

Selesaikan (Tentukan himpunan penyelesaian) pertaksamaan berikut :

a). $|x-2|<5$ b). $|5x-6|\ge 1$

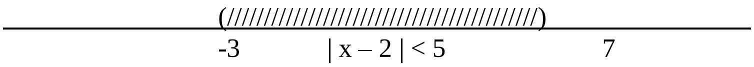
c) $|x^2-x|\le 2.$ d). $|2x-3|\le |x+2|$

Solusi

a). Berdasarkan teorema 1, $|x-2|<5 \Leftrightarrow -5<x-2<5$

$\Leftrightarrow -3<x<7.$

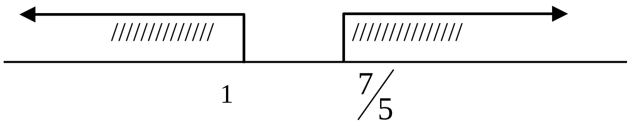
Jadi himpunan penyelesaianya adalah: (-3,7) = $\{x\in R: -3<x<7\}$ yaitu selang terbuka (-3,7).



b). $|5x-6|\ge 1 \Leftrightarrow 5x-6\ge 1$ atau $5x-6\le -1$

$\Leftrightarrow 5x\ge 7$ atau $5x\le 5$

$\Leftrightarrow .\ x\ge \frac{7}{5}$ atau $x\le 1$



Jadi Himpunan penyelesainya adalah:

$$(-\infty,1]\cup[7/5,\infty) = \left\{x\in R: x\le 1 \quad atau \quad x\ge \frac{7}{5}\right\}$$

c). $|x^2-x|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x^2-x\le 2 \Leftrightarrow$

$-2\le x^2-x$ *dan* $x^2-x\le 2$

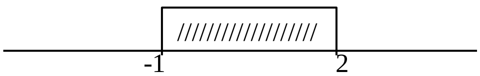
$x^2-x+2\ge 0$ *dan* $x^2-x-2\le 0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge 0$ *dan* $(x+1)(x-2)\le 0$

definit positif $-1\le x\le 2$

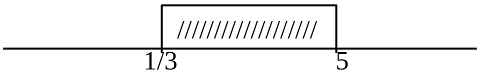
Jadi himpunan penyelesaiannya = $R\cap[-1,2]=[-1,2]$

$= \{x\in R;\ -1\le x\le 2\}$



d). $|2x-3| \le |x+2| \Leftrightarrow (2x-3)^2 \le (x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \le x^2 + 4x + 4$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 5 \le 0$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)(x-5) \le 0$$
$$\frac{1}{3} \le x \le 5$$



Himpunan solusinya adalah $\left[\frac{1}{3},5\right] = \left\{x \in R; \frac{1}{3} \le x \le 5\right\}$

<u>Cara lain :</u> $|2x-3| \le |x+2|$

oleh karena nilai mutlak suatu bilangan selalu tak negative, maka $0 \le |2x-3| \le |x+2|$. Jadi $|x+2| > 0$, maka kedua ruas di bagi |x + 2| sehingga pertaksamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{|2x-3|}{|x+2|} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x-3}{x+2}\right| \le 1$$

berdasarkan teorema 1, hasil tersebut ekivalen dengan :

$(*)$ $\quad -1 \le \frac{2x-3}{x+2} \le 1$, karena $|x+2| > 0$, maka $x \ne -2$

Jadi ada dua kasus yang perlu ditinjau yaitu $x < -2$ dan $x > -2$

Kasus (i)

Andaikan $x < -2$, maka $x + 2 < 0$ dan mengalikan ruas-ruas pertaksamaan $(*)$ dengan $x+2$, diperoleh :

$$-(x+2) \ge 2x - 3 \ge x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2 \le 2x-3 \le -(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x+2 \le 2x-3 \quad dan \quad 2x-3 \le -x-2$$
$$x-5 \ge 0 \quad dan \quad 3x-1 \le 0$$
$$x \ge 5 \quad dan \quad x \le \frac{1}{3} \ ,$$

hal ini tidak mungkin sebuah bilangan kurang dari $\frac{1}{3}$ sekaligus lebih besar dari 5. (dengan kata lain irisannya $=\Phi$). Jadi kasus (i) $x<-2$ tidak mungkin.

Kasus (ii)

Andaikan $x>-2$ maka $x+2>0$ dan mengalikan ruas-ruas pertaksamaan $(*)$ dengan $x+2$, diperoleh :

$$-(x+2) \quad \leq \quad 2x-3 \quad \leq \quad (x+2)$$

$$\Leftrightarrow -(x+2)\leq 2x-3 \qquad dan \qquad 2x-3\leq x+2$$

$$3x-1\geq 0 \qquad dan \qquad x-5\leq 0\,,$$

sehingga

$$x\geq\frac{1}{3} \qquad dan \qquad x\leq 5 \qquad dan \qquad x>-2$$

atau $\left[\frac{1}{3},\infty\right) \cap \left(-\infty,5\right] \cap \left(-2,\infty\right)=\left[\frac{1}{3},5\right]$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left[\frac{1}{3},5\right]=\left\{x\in R;\frac{1}{3}\leq x\leq 5\right\}$

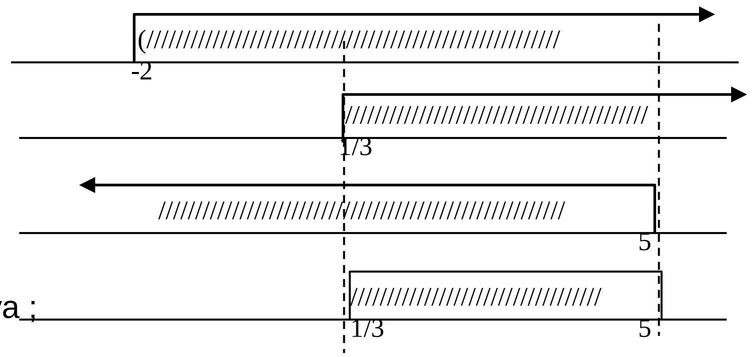
Hal ini mudah dilihat irisannya pada garis bilangan sebagai berikut :

$x>-2$

$x\geq\frac{1}{3}$

$x\leq 5$

Hasil irisannya ;



Contoh 2. Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan

a). $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| < \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$

b). $3|x| \le |x-1| + 5$

<u>Solusi</u> :

a). $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| < \left|\dfrac{1}{x-2}\right| \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2x-1}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{(2x-1)^2} < \frac{1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow 25(x-2)^2 - (2x-1)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 21x^2 - 54x + 24 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 3(7x-4)(x-2) < 0$$

```
            (//////////////////)
            4/7                2
```

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left(\dfrac{4}{7}, 2\right) = \left\{x \in R; \dfrac{4}{7} < x < 2\right\}$

b). $3|x| \le |x-1| + 5 \quad \Leftrightarrow 3|x| - |x-1| \le 5$

Tuliskan persamaannya tanpa bentuk nilai mutlak dengan menggunakan sifat :

$|x| = \begin{cases} x, & bila\ \ x \ge 0 \\ -x, & bila\ \ x < 0 \end{cases}$ dan $|x-1| = \begin{cases} x-1, & bila\ \ x \ge 1 \\ 1-x, & bila\ \ x < 1 \end{cases}$

Titik 0 dan 1 membagi garis bilangan atas tiga daerah :

$x < 0 \quad ; \quad 0 \le x \le 1 \quad ; \quad x \ge 1$

```
 ________________|________________|________________
     x < 0       0     0≤x≤1      1     x ≥ 0
```

Proses penyelesaiannya pada garis bilangan adalah sebagai *berikut*:

$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$\lvert x \rvert = -x$ $\lvert x-1 \rvert = 1-x$ Subtitusi ke pertidaksamaannya pada $3\lvert x \rvert - \lvert x-1 \rvert \leq 5$, diperoleh $-3x-(1-x) \leq 5$ $-2x-1 \leq 5$ $-2x \leq 6$ $x \geq -3$	$\lvert x \rvert = x$ $\lvert x-1 \rvert = 1-x$ Subtitusi ke pertidaksamaannya pada $3\lvert x \rvert - \lvert x-1 \rvert \leq 5$, diperoleh $3x-(1-x) \leq 5$ $4x-1 \leq 5$ $4x \leq 6$ $x \leq \frac{3}{2}$	$\lvert x \rvert = x$ $\lvert x-1 \rvert = x-1$ Subtitusi ke pertidaksamaannya pada $3\lvert x \rvert - \lvert x-1 \rvert \leq 5$, diperoleh $3x-(x-1) \leq 5$ $2x+1 \leq 5$ $2x \leq 4$ $x \leq 2$
iriskan dengan $(-\infty, 0)$ $\therefore HP1 = (-\infty,0) \cap [-3,0)$ = $[-3,0)$	iriskan dengan $[0,1)$ Hp2 = $[0,1) \cap \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ = $[0,1)$	iriskan dengan $[1,\infty)$ Hp3= $[1,\infty) \cap (-\infty,2]$ = $[1,2]$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dari ketiga himpunan penyelesaian diatas :

Hp = $Hp_1 \cup Hp_2 \cup Hp_3$
$= [-3,0) \cup [0,1) \cup [1,2]$
$= [-3,2]$

Jadi $Hp_3 = [-3,2]$

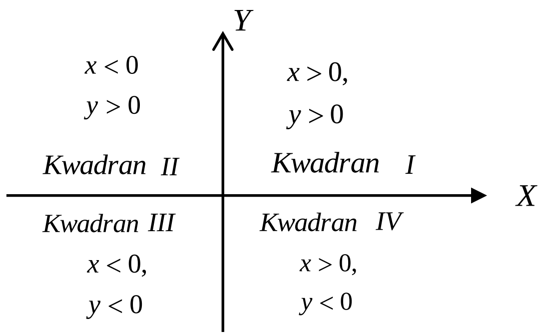
SISTEM KOORDINAT

Sistem koordinat adalah suatu cara yang digunakan untuk menentukan letak suatu titik pada bidang dua dimensi (R^2) atau ruang tiga dimensi (R^3).

Beberapa macam sistem koordinat yang kita kenal, antara lain sistem koordinat Cartesius (Rene Descartes: 1596-1650), sistem koordinat kutub, sistem koordinat tabung, dan sistem koordinat bola. Pada bidang (R^2), letak titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius dan koordinat kutub. Sedangkan pada ruang (R^3) letak suatu titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius, koordinat tabung dan koordinat bola.

Pada modul ini akan dibahaskan koordinat cartesius bidang dan menggambarkan kurva persmaan dan bidang pertidaksamaan pada sistem koordinat.

1) Sistem Koordinat Cartesius



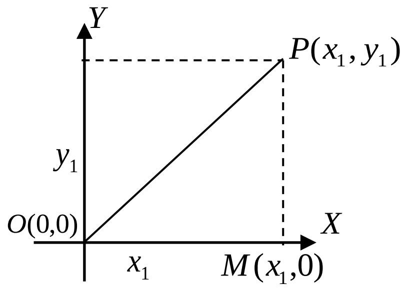
Terdapat 4 bidang simetris yang dibatasi oleh sumbu-sumbu koordinat X dan Y, masing-masing bidang yang dibatasi oleh bidang dinamakan kwadran, sehingga terdapat 4 kwadran, dengan ketentuan :

a. kuadran I (x>0, y>0), misal titik P (2,3)
b. kwadran II (x<0, y>0), misal titik P (-2,3) → -2 < 0 dan 3 > 0
c. kwadran III (x<0, y<0), misal titik P (-2,-3)
d. kwadran IV (x>0, y<0), misal titik P (2,-3)

Misalkan P(x,y) sebarang titik pada bidang XOY, maka titik tersebut posisinya dapat dikwadran I, atau II, atau III, atau kwadran IV tergantung besaran x dan y. Jika letak titik P(x,y), maka x disebut absis, y disebut ordinat dan P(x,y) disebut koordinat.

Perhatikan gambar berikut ini.

Misal $P(x_1,y_1)$ dan terletak di kwadran I hal ini berarti $x_1 > 0$ dan $y_1 > 0$



Berdasarkan gambar di atas, Garis OP yang menghubungkan titik O(0,0) dan $P(x_1,y_1)$, membentuk suatu segitiga siku-siku dengan titik M di sumbu x. ΔOPM memiliki sudut siku-siku dititik M.

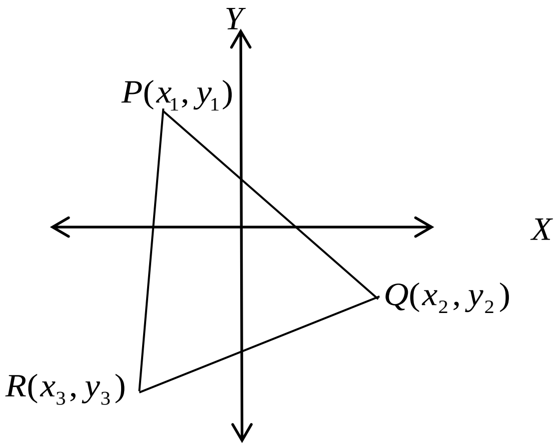
Menurut teorema Pythagoras

$$\begin{aligned} OP^2 &= OM^2 + MP^2 \\ &= (x_1-0)^2 + (y_1-0)^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 \\ &= \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}} \end{aligned}$$

atau ditulis dengan notasi $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$

Rumus di atas dinamakan rumus jarak dua titik yang menghubungkan titik O(0,0) dengan titik $P(x_1,y_1)$

Selanjutnya perhatikan gambar berikut.



Gambar di atas menunjukkan segitiga PQR yang masing-masing titik sudutnya yaitu $P(x_1, y_1)$ terletak pada kuadran II, $Q(x_2, y_2)$ terletak pada kuadran IV, $R(x_3, y_3)$ terletak pada kuadran III dan jarak masing-masing titik dinyatakan oleh:

1. $|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

   $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. $|PR| = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$

   $= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

3. $|QR| = \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2}$

   $= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

2. Menggambar Kurva Persamaan dalam Sistem Koordinat

Sebuah persamaan dengan 2 variabel x dan y dapat digambarkan dalam sistem koordinat. Penyajian kurva persamaan dalam sistem koordinat, akan memudahkan pemahaman tentang karakteristik persoalan yang diwakili oleh persamaan tersebut.

Berikut adalah langkah-langkah umum menggambarkan persamaan dalam sistem koordinat:
1. Cari perpotongan kurva dengan sumbu x, yaitu untuk y = 0
2. Cari perpotongan kurva dengan sumbu y, yaitu untuk x = 0
3. Cari beberapa titik tertentu pada kurva, misalkan
   a. untuk x = n, dimana n adalah sembarang nilai yang dapat diterima oleh persamaan, atau
   b. untuk titik tengah antar dua nilai x yang sudah dimiliki, atau
   c. untuk titik x atau y yang menjadi nilai batas atau nilai esktrim

Menggambar Kurva Persamaan Linear

Contoh :
Gambarkanlah kurva untuk persamaan berikut:

a. y = 2x + 1
b. y + x – 5 = 0
c. y – 2x =0
d. 2y + x = 2

a. y = 2x + 1

perpotongan dengan sumbu x

→ y = 0 → 2x + 1 = 0

2x = -1 => x = - ½ => (-1/2, 0)

perpotongan dengan sumbu y

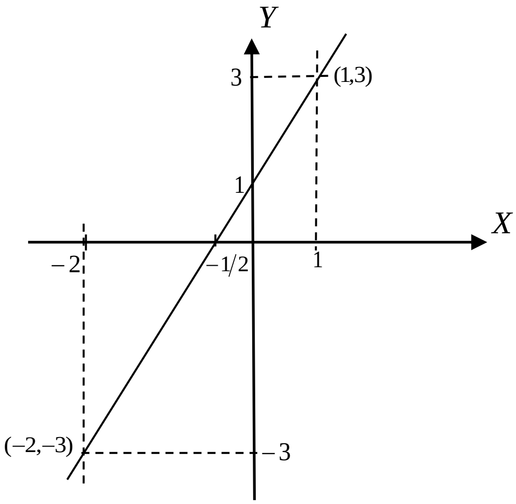
→ x = 0 → y = 2.0 + 1 => y = 1 => (0, 1)

Titik lain, misalkan untuk x = 1 → y = 2.1 + 1 = 3 (1, 3)

untuk y = -3 → -3 = 2.x + 1

2.x = -3 – 1

x = -4/2 = -2 (-2,-3)



b. y + x – 5 = 0

perpotongan dengan sumbu x

→ y = 0 → 0 + x – 5 = 0

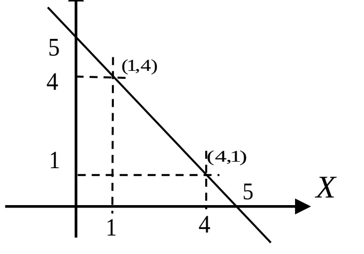
x = 5 => (5, 0)

perpotongan dengan sumbu y

→ x = 0 → y + 0 – 5 = 0 => y = 5 => (0, 5)

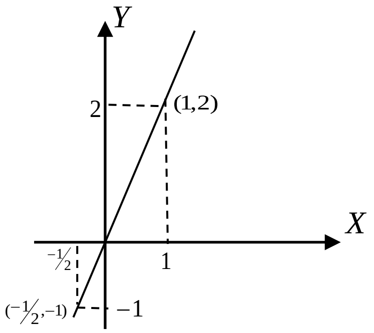
Titik lain, misalkan untuk x = 2 → y - + 1– 5 = 0 => y = 4 (1, 4)

untuk y = -1 → 1 + x – 5 = 0 => x = 4 (4, 1)



c. y – 2x = 0
perpotongan dengan sumbu x
→ y = 0 → 0 - 2x = 0 => x = 0 => (0, 0)
→ kurva memotong sumbu x dan sumbu y di titik (0, 0)

Titik lain, misalkan untuk x = 1 → y – 2. 1 = 0 => y = 2 (1, 2)
untuk y = -1 → -1– 2x = 0 => x = -½ → (-½ ,-1)

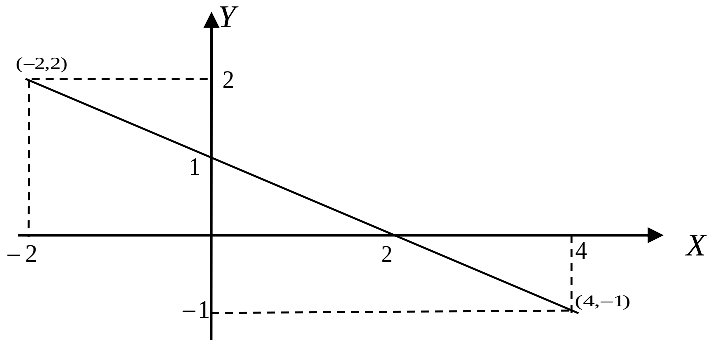


d. 2y + x = 2
perpotongan dengan sumbu x
→ y = 0 → 0 + x = 2 => x = 2 => (2, 0)

perpotongan dengan sumbu y

→ x = 0 → 2y + 0 = 2 => y = 2/2 => y = 1 => (0, 1)

Titik lain,
misalkan untuk x = 4 → 2y + 4 = 2 => 2y = 2- 4
=> y = -2/2 => (4, -1)
untuk y = 2 → 2.2 + x = 2 => x = 2-4 = -2 → (-2, 2)



Menggambar Kurva Persamaan Kuadrat

Untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c$, akan dihasilkan kurva berbentuk parabola, posisi kurva dan arah lengkungan tergantung pada nilai koefisien *a, b* dan *c*, dan nilai diskriminan D = $b^2 - 4.a.c$

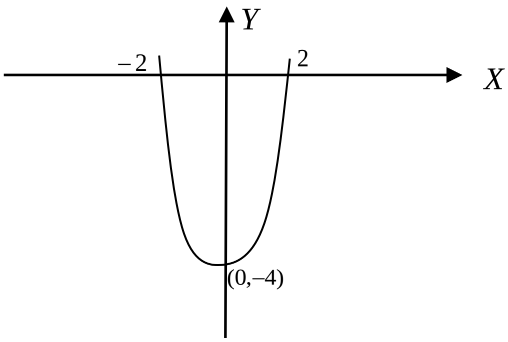
Terdapat beberapa kemungkinan parabola :

1. Parabola telentang jika a>0 dan parabola tertelungkup jika a<0
2. Parabola menyentuh sumbu x disatu titik jika D = 0
3. Parabola tidak memotong sumbu x, dan selalu diatas sumbu x atau y > 0 atau definit positif, jika D < 0 dan a>0
4. Parabola tidak memotong sumbu x, dan selalu dibawah sumbu x atau y < 0 atau definit negatif, jika D < 0 dan a>0

Contoh :
Gambarkanlah kurva untuk persamaan berikut:
a. $y = x^2 - 4$ b. $y = x^2 - 2x + 3$

Penyelesaian
a. $y = x^2 - 4$ a = 1> 0 kurva telentang
$D = 0^2 - 4.1.(-4) > 0$ kurva memotong sumbu x di-dua titik

perpotongan dengan sumbu x
→ y = 0 → $x^2 - 4 = 0$
$(x - 2)(x + 2) = 0$
$x - 2 = 0$ atau $x + 2 = 0$
$x = 2$ $x = -2$
=> (2, 0) dan (-2, 0)
=> kurva memotong sumbu x dititik berlawanan, yaitu 2 & -2
=> titik balik kurva berada di x=0 (di sumbu y)
→ x = 0 → $y = 0^2 - 4$ => y = -4 => (0, -4)

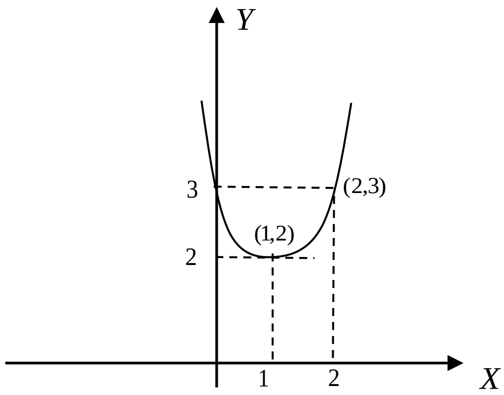


b. $y = x^2 - 2x + 3$ $a = 1 > 0$ kurva telentang
$D = (-2)^2 - 4.1.3 = -8$ => $D < 0$ kurva tidak memotong sumbu x

Titik potong kurva dengan sumbu y => $x = 0$
=> $y = 0^2 - 2.0 + 3$
$= 3$ → $(0, 3)$

Cari titik lain dengan nilai $y = 3$
$y = x^2 - 2.x + 3$
$3 = x^2 - 2.x + 3$
$x^2 - 2.x = 3-3$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0$ dan $x = 2$
$(0,3)$ $(2, 3)$

Garis tengah berada diantara $x = 0$ dan $x = 2$ yaitu $x = 1$
→ untuk $x = 1$ $y = 1^2 - 2.1 + 3 = 2$ → $(1, 2)$



3. Menggambar Bidang Pertidaksamaan dalam Sistem Koordinat

Sebuah pertidaksamaan dengan 2 variabel x dan y dapat digambarkan dalam sistem koordinat sebagai sebuah bidang.
Untuk mendapatkan bidang solusi, gambarkan terlebih-dahulu kurva persamaan. Selanjutnya pilihlah dua titik, diwilayah yang bersebrangan, dan lakukan pengujian.

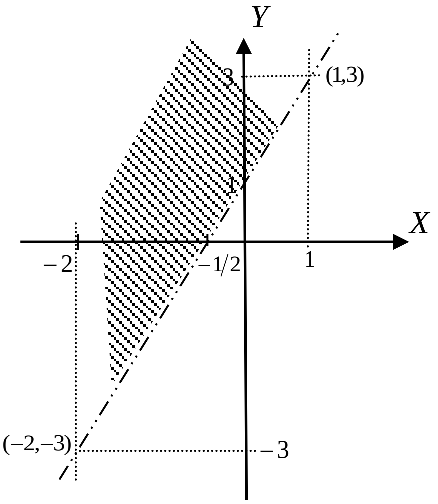
- Untuk pertidaksamaan dengan symbol > atau <, kurva tidak termasuk area solusi dan digambarkan sebagai garis putus-putus
- Untuk pertidaksamaan dengan symbol ≥ atau ≤, kurva termasuk area solusi dan digambarkan sebagai garis kontinue

Gambarkan bidang yang memenuhi untuk pertidaksamaan berikut:

a. $y > 2x + 1$
b. $y - 2x \le 0$
c. $y < x^2 - 4$
d. $y \ge x^2 - 2x + 3$

a. $y > 2x + 1$

kurva untuk $y = 2x + 1$, kurva putus-putus karena simbol >

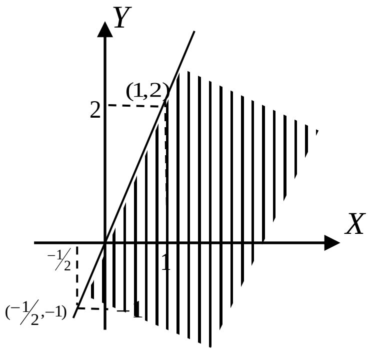


Pilih titik (0, 0) dan (0, 3)

(0, 0) → $y > 2x + 1$
$0 > 2.0 + 1$
$0 > 1$
salah = bukan area solusi

(0, 3) → $y > 2x + 1$
$3 > 2.0 + 1$
$3 > 1$
benar = area solusi

c. $y - 2x \le 0$
kurva untuk $y - 2x = 0$ adalah kurva garis kontinue karena ≤



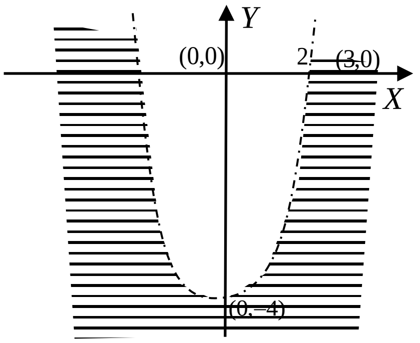
Pilih titik (0, 2) dan (1,0)

(1, 0) → $y - 2x \le 0$
$0 - 2.1 \le 0$
$-2 \le 0$
benar = area solusi

(0, 2) → $y - 2x \le 0$
$2 - 2.0 \le 0$
$2 \le 0$
salah = bukan area solusi

c. $y < x^2 - 4$

kurva untuk $y < x^2 - 4$, kurva putus-putus karena simbol <



Pilih titik (0, 0) dan (3,0)

(0, 0) → $y < x^2 - 4$

$0 < 0^2 - 4$

$0 < -4$

salah = bukan area solusi

(3, 0) → $y < x^2 - 4$

$0 < 3^2 - 4$

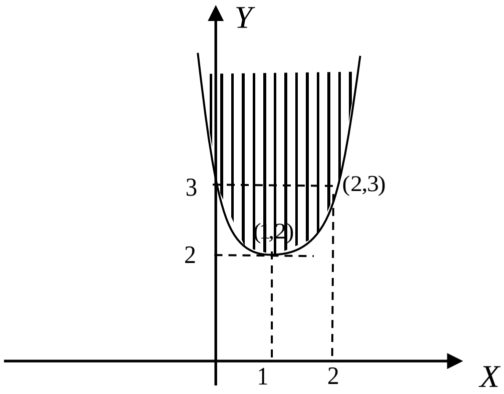
$0 < 9 - 4$

$0 < 5$

benar = area solusi

d. $y \geq x^2 - 2x + 3$

kurva untuk $y \geq x^2 - 2x + 3$, kurva kontinue karena simbol ≥



Pilih titik (0, 0) dan (1, 3)

(0, 0) → $y \geq x^2 - 2x + 3$

$0 \geq 0^2 - 2.0 + 3$

$0 \geq 3$

salah = bukan area solusi

(1,3) → $y \geq x^2 - 2.x + 3$

$3 \geq 1^2 - 2.1 + 3$

$3 \geq 2$

benar = area solusi