**DASAR TOERI**

**DIFERENSIAL PARSIAL**

1. **Persamaan diferensial**

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial parsial digunakan untuk melakukan formulasi dan menyelesaikan permasalahan yang melibatkan fungsi-fungsi yang tidak diketahui, yang merupakan bentuk dari beberapa variabel.

Bentuk paling sederhana dari persamaan diferensial adalah

di mana *u* suatu fungsi tak diketahui dari *x* dan *y*. Hubungan ini mengisyaratkan bahwa nilai-nilai *u* (*x*,*y*) adalah tidak bergantung dari *x*. Oleh karena itu solusi umum dari persamaan ini adalah

di mana *f* adalah suatu fungsi sembarang dari variabel *y*. Analogi dari [persamaan diferensial biasa](http://id.wikipedia.org/wiki/Persamaan_diferensial_biasa) untuk persamaan ini adalah



yang memiliki solusi :

di mana *c* bernilai konstan (tidak bergantung dari nilai *x*). Kedua contoh di atas menggambarkan bahwa solusi umum dari persamaan diferensial biasa melibatkan suatu kostanta sembarang, akan tetapi solusi dari persamaan diferensial parsial melibatkan suatu fungsi sembarang. Sebuah solusi dari persamaan diferensial parsial secara umum tidak unik; kondisi tambahan harus disertakan lebih lanjut pada [syarat batas](http://id.wikipedia.org/w/index.php?title=Syarat_batas&action=edit&redlink=1) dari daerah di mana solusi didefinisikan.

1. **TAFSIRAN TURUNAN PARSIAL**

Andaikan, z = *f* (x, y) adalah suatu permukaan fungsi dua variabel dari x dan y. Bilamana y diambil konstan, misalnya y = y0. Berkas permukaan tersebut dinyatakan dengan dua persamaan yaitu :

**Z =** *f* **(x,y) dan y= y0**

Berkas lengkungan permukaan tersebut merupakan perpotongan permukaanz = *f* (x,y) dan bidang y= yo . Jadi turunan parsial *f* terhadap x, *f*x (x,y) di (x0,y0) dapat ditafsirkan sebagai gradian garis singgung kurva yang diberikan oleh z = *f* (x,y) dan y=y0 dititik (x0,y0), *f* (x0,y0 ) dengan zo =*f* (x0,y0).

Dengan pendekatan yang sama, turunan parsial *f* terhadap y, *f*y(x,y) ditafsirkan merupakan gradiean garis singgung kurva pada permukaan, z = *f* (x,y) dan x=x0 dititik P0 (x0,y0,z0) pada bidang x= x0. Karena setiap turunan merupakan ukuran dari suatu laju perubahan, maka turunan parsial dapat diartikan sebagai laju perubahan. Sehingga *f*x (x,y) dapat diartikan sebagai laju perubahan dari *f* (x,y) terhadap x bilamana y konstan. Demikian sebaliknya untuk *f*y(x,y).

1. **TURUNAN PARSIAL FUNGSI DAN VARIABEL**

Andaikan diberikan fungsi n variabel dari x1,x2,x3,.......xn dengan persamaan :

W=*f* (x1,x2,x3,.......xn)

Bilamana turunan- turunan parsialnya ada, turunan-turunan parsialnya diberikan oleh, $\frac{∂w}{∂x1}$ = *f*x1, $\frac{∂w}{∂x2}$ =*f*x2, $\frac{∂w}{∂x3}$ = *f*x3,... $\frac{∂w}{∂xn}$ = *f*xn

Khusus tiga variabel dari x,y, z persamaan fungsinya dapat diberikan:

W= *f* (x,y,z)

Sedangkan turunan parsialnya dapat dinyatakan:

$\frac{∂w}{∂x}$ **=** *f***x(x,y,z),** $\frac{∂w}{∂y}f$**y (x,y,z),** $\frac{∂w}{∂z}$*f***z (x,y,z)**

1. **TURUNAN PARSIAL ORDE TINGGI**

Pada umumnya parsial fungsi dua variabel dari x dan y yakny *f*x(x,y) dan *f*y (x,y) masih memuat variabel x dan y. Fungsi turunan parsial*f*x(x,y) dan *f*y (x,y) masih dapat diturunkan terhadap x dan y, hasinya disebut turunan parsial orde 2.

**CONTOH SOAL**

1. Hitunglah $\frac{∂z}{∂x}$ dan Jika $\frac{∂z}{∂y}$
2. Z =$ \frac{X}{x^{2}+y^{2} }$
3. Z = x sin xy
4. x3 + xy2 – x2z + z3 – 2 = 0
5. Z =$\sqrt{e^{x+2y}-y^{2}}$

Jawaban

1. $\frac{∂z}{∂x} $= $\frac{(x^{2}+y^{2}).1-x(2x)}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$ = $\frac{y^{2}- x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$

$\frac{∂z}{∂y}$ = $\frac{(x^{2}+y^{2}).0-x(2y)}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$ = $\frac{-2xy}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$

1. $\frac{∂z}{∂x}$ = 1 sin xy + x(cos xy)y = sin xy + xy cos xy

$\frac{∂z}{∂y}$ = x (cosxy) x = x2 cos xy

1. 3x2 + y2 – 2xz – x2 $\frac{∂z}{∂x}$ + 3z2 $\frac{∂z}{∂x}$ = 0

(-x2 + 3z2) $\frac{∂z}{∂x}$ = - 3x2 – y2 +2xz $\frac{∂z}{ ∂x}$ = $\frac{3x^{2}- y^{2}- 2xz}{x^{2}-3z^{2}^{}}$

2xy – x2 $\frac{∂z}{∂y}$ + 3z2 $\frac{∂z}{∂y}$ = 0 $\frac{∂z}{∂y}$ = $\frac{2xy}{(x^{2}-3z^{2})^{}}$

1. Z = ($e^{x+2y}-y^{2})$1/2

 $\frac{∂z}{∂x}$ = $\frac{1}{2}$ ($e^{x+2y}-y^{2}$) -1/2  . $e^{x+2y} .1$= $\frac{e^{x+2y}}{2(e^{x+2y}-y^{2})^{1/2}}$

 $\frac{∂z}{∂y} $= $\frac{1}{2}$ ($e^{x+2y}-y^{2}$) -1/2  . ($2e^{x+2y}-2y^{}$)  = $\frac{e^{x+2y}- y}{(e^{x+2y}-y^{2})^{1/2}}$

1. Hitunglah dz dari x2 + 2y2 – z2 = 1

Jawaban

x2 + 2y2 – z2 = 1 2x – 2z $\frac{∂z}{∂x}$ = 0 , $\frac{∂z}{∂x}$ = $\frac{2x}{2z}$ = $\frac{x}{z}$

4y – 2z $\frac{∂z}{∂y}$ = 0 , $\frac{∂z}{∂y}$ = $\frac{4y}{4z}$ = $\frac{2y}{∂z}$

dz =$ \left(\frac{x}{z}\right)$ dx + $\left(\frac{2y}{z}\right)$ dy = $\frac{x dx+2y dy}{z}$

**SOAL LATIHAN**

1. Hitunglah $\frac{∂z}{∂x}$ dan $\frac{∂z}{∂y}$ jika z= x3y2 ( 4 - 2x + y2 )
2. Diberikan z = sin $\left(\frac{x}{y}\right)$+ ln $\left(\frac{y}{x}\right)$ . Buktikan bahwa x $\frac{∂z}{∂x}$ + y$\frac{∂z}{∂y}$ = 0

**JAWABAN**

1. Untuk menghitung $\frac{∂z}{∂x}$ dengan menganggap y sebagai konstan dan mendeferensialkan terhadap x dan menerapkan hasil kali turunan biasa dihasilkan.

$\frac{∂z}{∂x}$ = x3y2 $\frac{∂}{∂x}$ (4-2x+y2) + (4-2x+y2) $\frac{∂}{∂x}$ (x3y2)

 = x3y2(-2) + (4-2x+y2)(3x2y2)

 = x2y2(12-8x+3y2)

Dengan menganggap x konstan, turunan parsial terhadap y diberikan oleh :

$\frac{∂z}{∂y}$ = x3y2 $\frac{∂}{∂y}$ (4-2x+y2) + (4-2x+y2) $\frac{∂}{∂y}$ (x3y2)

 = x3y2(2y) + (4-2x+y2) (2x3y)

 = x3y(8-4x+4y2)

1. Langkah pertama menghitung $\frac{∂z}{∂x} $dan $\frac{∂z}{∂y}$

Dengan menganggap y konstan, dengan mendeferensialkan z terhadap x dihasilkan,

$\frac{∂z}{∂x}$ = cos $\left(\frac{x}{y}\right)\frac{∂}{∂x}$ $\left(\frac{x}{y}\right) $+ $\frac{1}{^{y}/\_{x}}$ $\frac{∂}{∂x}$ $\left(\frac{y}{x}\right)$

 = $\frac{1}{y}$ cos $\left(\frac{x}{y}\right)$ + $\frac{x}{y}$ $\left[- \frac{y}{x^{2}}\right]$

 = $\frac{1}{y}$ cos $\left(\frac{x}{y}\right)$- $\frac{1}{x}$

Demikian pula, dengan menganggap x konstan turunan parsial z terhadap y diberikan oleh :

$\frac{∂z}{∂y}$ = cos $\left(\frac{x}{y}\right)\frac{∂}{∂y}$ $\left(\frac{y}{x}\right) $+ $\frac{1}{^{y}/\_{x}}$ $\frac{∂}{∂y}$ $\left(\frac{y}{x}\right)$

 = - $\frac{x}{y^{2}}$ cos $\left(\frac{x}{y}\right)$+ $\frac{x}{y}$ $\frac{1}{x}$

 = - $\frac{x}{y^{2}}$ cos $\left(\frac{x}{y}\right)$+ $\frac{1}{y}$

Langkah kedua, membuktikan kesamaan x $\frac{∂z}{∂x}$ +y $\frac{∂z}{∂y}$ = 0

Dengan menggunakan hasil dari langkah pertama dihasilkan :

x $\frac{∂z}{∂x}$ +y $\frac{∂z}{∂y}$ = x $\left[\frac{1}{y}\cos(\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{x} )\right]+ y \left[-\frac{x}{y^{2}}\cos(\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y} )\right]$

 = $\left(\frac{x}{y}\cos(\left(\frac{x}{y}\right)-1)\right)$ + $\left(-\frac{x}{y}\cos(\left(\frac{x}{y}\right)+1)\right)$

 = 0