TURUNAN

Tujuan Instruksional Umum :

1. Mahasiswa mampu memahami teori dan konsep turunan
2. Mahasiswa mampu memahami hukum-hukum pada turunan
3. Mahasiswa mampu memahami jenis-jenis turunan
4. Mahasiswa mampu memahami operasi yang berlaku

Tujuan Instruksional Khusus :

1. Mahasiswa mengetahui dan mampu menggunakan dengan jelas teori dan konsep turunan
2. Mahasiswa mengetahui dengan jelas rumus-rumus yang berlaku di turunan
3. Mahasiswa mengetahui dengan jelas jenis-jenis turunan
4. Mahasiswa mampu menghitung operasi yang berlaku pada turunan

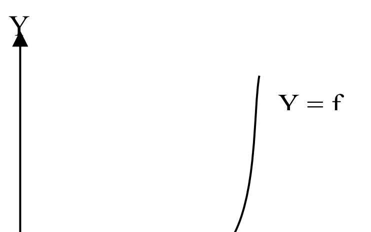
1. PENDAHULUAN

Yang dimaksud dengan Teori Diferensial yaitu teori yang membahas mengenai adanya perubahan variabel terikat akibat perubahan variabel bebasnya, dimana perubahan variabel bebas tersebut tergolong perubahan yang sangat kecil.

2. KUOSIEN DIFERENCE

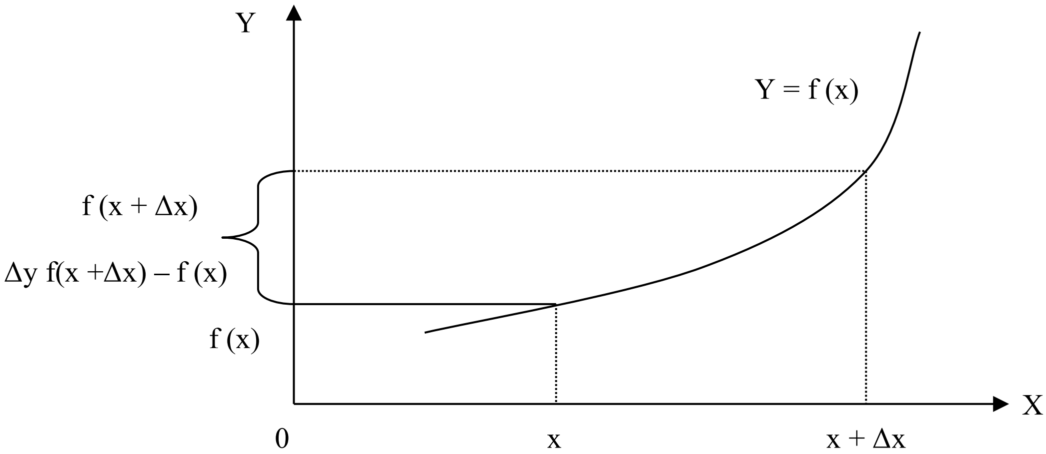
Misalkan ada fungsi y = f (x) dimana y merupakan variabel terikatnya dan x adalah variabel bebasnya. Penggambaran pada grafik :

Gambar :



Variabel bebas x bergerak (misalkan bergerak ke kanan di sepanjang sumbu datar) sebanyak Δx mengakibatkan dicapai titik yang baru yaitu x + Δx. Perubahan variabel bebas tersebut mempengaruhi variabel terikatnya (y) sehingga y berpindah tempat dari f (x) menjadi f (x + Δx). Besarnya perubahan y itu disebut “beda” atau difference.

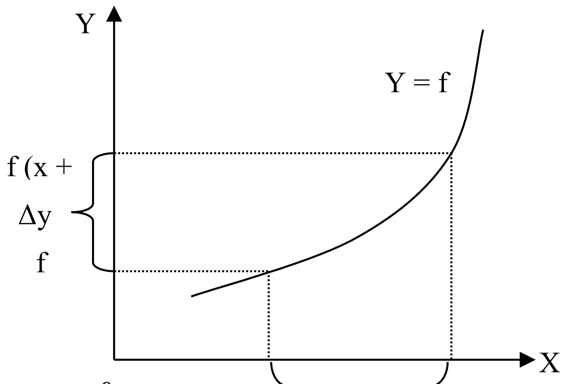
Penggambarannya :



Perbandingan antara perubahan y (Δy) terhadap perubahan x (Δx) disebut kuosien difference dan hitung :

Kuosien Difference = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - (x)}{\Delta x}$

Penggambarannya :



Contoh :

1. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= 2(x + \Delta x) - 2x$

   $= 2x + 2\Delta x - 2x$

   $= 2\Delta x$

   Kuosien Difference :

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

   Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak 2 satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 2 satuan.

2. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x - 3$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x) - 3\} - \{2x - 3\}$

   $= 2x + 2\Delta x - 3 - 2x + 3$

   $= 2\Delta x$

   Kuosien Difference :

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak 2 satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 2 satuan.

3. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x^2$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : Δy $= f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x)^2 - \{2x^2\}$

   $= 2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 2x^2$

   $= 4\,\Delta x\,\Delta x + a\,\Delta x_2$

   Kuosien Difference : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x\Delta x$$

   Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak $4x\Delta x$ satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak $4x\Delta x$ satuan.

4. Diberikan fungsi sebagai berikut $y = 2x^2 - 3$

   Carilah beda / difference nya serta kuosien difference nya !

   Jawab :

   Beda / difference : Δy $= f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= \{2(x + \Delta x)^2 - 3\} - \{2x^2 - 3\}$

   $= \{2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) - 3\} - \{2x^2 - 3\}$

   $= 2x^2 + 4x\,\Delta x + 2\,\Delta x^2 - 3 - 2x^2 + 3$

   $= 4x\,\Delta x + 2\Delta x^2$

   Kuosien Difference : Δy $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$$

Artinya setiap penambahan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan penambahan y sebanyak 4x + 2Δx satuan, sebaliknya setiap pengurangan x sebanyak 1 satuan akan menyebabkan pengurangan y sebanyak 4x + 2Δx satuan.

3. DIFFERENSIASI

Proses differensiasi yaitu proses pengenaan Limit Δx → 0 terhadap kuosien difference. Hasil tersebut dinamakan differensial atau turunan.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Limit}}{\Delta x \to 0} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Contoh :

1. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = 2x karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2$

   $\frac{dy}{dx} = 2$

2. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = 2x- 3 karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2$

   $\frac{dy}{dx} = 2$

3. Diberikan fungsi sebagai berikut : y = $2x^2$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x$

$\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

4. Diberikan fungsi sebagai berikut : $y = 2x^2 - 3$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x$

   $\frac{dy}{dx} = 4x$

5. Diberikan fungsi sebagai berikut : $y = 2x^2 - 3x$ karena telah diketahui bahwa Kuosien Difference-nya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$

   Maka $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x - 3$

   $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

4. KAIDAH-KAIDAH TURUNAN

a. Turunan konstanta

   1. Misalkan y = k, dimana k konstanta,
   2. Maka dy / dx = 0
   3. Contoh : y = 2, maka dy / dx = 0

b. Turunan fungsi pangkat

   1. Misalkan $y = x^n$, n = konstanta dan x variabel
   2. Maka $dy / dx = nx^{n-1}$
   3. Contoh : $y = x^7$, maka $dy / dx = 7x^{7-1} = 7x^6$

c. Turunan perkalian konstanta dengan fungsi

   1. Misalkan $y = kx^n$, dimana k dan n konstanta dan x variabel
   2. Maka $dy / dx = k * nx^{n-1}$

3. Contoh : y = (13x^4, maka dy / dx = 13 ($4x^{4-1}$) = $52x^3$

d. Turunan fungsi berpangkat

1. Misalkan y = U^n, dimana U = g(x) dan n konstanta
2. Maka dy / dx = n U^{n-1} dU/dx
3. Contoh : y = $(x^2-3x)^7$, maka dy / dx = 7 $(x^2-3x)^6$. (2x-3)

e. Turunan fungsi rantai

a. Misalkan y = U + V, dimana U = g (x) dan V = h (x)

b. Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ = U' + V'

1.

c. Contoh : y = $12x^5$ - $9x^3$, maka $\frac{dy}{dx}$ = ($12.5.x^{5-1}$) – ($9.3x^{3-1}$)

= $60x^4 - 27x^2$

f. Turunan perkalian fungsi

a. Misalkan y = U . V, dimana U = g (x) dan V = h (x)
b. Maka dy / dx = (dU/dx) . V + U . (dV/dx)
c. Contoh : y = $3x^2$ (x-2)^5 dengan U = $3x^2$, maka dU/dx = 6x
   dan V = $(x-2)^5$, maka dV/dx = 5 . (x -2)$^{5-1}$ 1 = 5 . $(x-2)^4$
d. Sehingga dy/dx = 6x $(x-2)^5$ + $3x^2$ (5 $(x-2)^4$ = 6x (x-2) + $15x^2$ $(x-2)^4$

g. Turunan fungsi eksponensial

a. Misalkan y = U/V, dimana U = g (x) V = h (x) dan V^1 0
b. Maka :
c. $\frac{dY}{dx} = \frac{\left(\frac{dU}{x}\right) V - U \left(\frac{dV}{dx}\right)}{V^2}$

d. Contoh : y = $\frac{5x^2 - 4x}{2 - x}$ dengan U = $5x^2$ – 4x, maka dU/dx = 10x-4

dan V = 2 – x, maka dV/dx = -1

Maka :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(10x-4)(2-x)-(5x^2-4x)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{20x-10x^2-8+4x+5x^2-4x}{4-2x+x^2}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-5x^2+20x-8}{4-2x+x^2}$$

h. Turunan fungsi eksponensial

1. Misalkan $y = e^x$, maka $dy/dx = e^x$
2. Misalkan $y = a^x$, maka $dy/dx = a^x \; In^a$

i. Turunan fungsi komposit - eksponensial

1. Misalkan $y = e^u$, dimana $U = f(x)$, maka $dy/dx = e^u \cdot (dU/dx)$

   Contoh : $y = e^{2x}$, dimana $U = 2x$, dimana $dy/dx = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

2. Misalkan $y = a^u$, dimana $U = f(x)$, maka $dy/dx = a^u \; In\; a \; (dU/dx)$

   Contoh $y = 8^{2x}$, dimana $u = 2x$, maka $dy/dx = 8^{2x} \; In\; 8.\; 2$

5. JENIS-JENIS DIFERENSIAL

1. Diferensial Biasa

   Yaitu diferensial yang dilakukan terhadap fungsi yang mengandung tepat satu variabel. Fungsinya : $y = f(x)$, dimana jumlahnya satu dan x merupakan variabel. Turunan pertama : dy/dx, turunan keduanya : dy^2 / dx^2

   Contoh :

   a) $y = 8x^3 - e^{2x} + 24$

      Maka turunan pertamanya : $dy/dx = 8.3 \cdot x^{3-1} - e^{2x} \cdot 2 + 0 = 24\, x^2 - 2e^{2x}$

      Turunan keduanya : $dy^2 / (dx)^2 = 24 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 48x - 4e^{2x}$

   b) Fungsi Average Revenue / Pendapatan Rata-rata : $AR = 150 - 6Q^2$: output yang dijual, maka turunan pertamanya : $dAR/dQ = 150 - 6 \cdot 2Q$

      $= 150 - 12Q$

Turunan keduanya : $dAR^2 / (dQ)^2 = -12$

c) Fungsi Permintaan : Qd = 80 – 25P, P : harga jual produk

   Maka turunan pertamanya : dQd / dP = -25

   Turunan keduanya : $dQd^2 / (dP)^2 = 0$

2. Diferensial Berantai

   Yaitu diferensial yang dilakukan terhadap fungsi yang merupakan fungsi dari uatu variabel. Fungsinya : y = f (x), dimana x jumlahnya satu dan x merupakan fungsi (misalkan x fungsi dari h); x = g (h), dimana h jumlahnya satu dan h merupakan variabel.

   Turunannya : y = diturunkan terhadap x, ditulis dy / dx dan

   x = diturunkan terhadap h, ditulis dx / dh

   Untuk mencari turunan y terhadap h dapat dilakukan dengan cara mengalihkan kedua turunan tersebut : dy / dh = (dy/dx). (dx / dh).

   Contoh :

   a. $y = 2x^3$, $x = 3h^2$, maka dy/dx $= 6x^2 . 6h$

      $= 6 (3h^2)^2 . 6h$

      $= 108 h^5$

   b. Fungsi Revenue / Pendapatan ; R = 3Q dimana $Q = 0{,}4\ C^2 – 3C$, C : Capital maka turunan pertamanya : dR/dQ = 3 dan dQ/dC =0,4 C – 3

      Untuk mencari turunan R terhadap C diperoleh melalui direfensial berantai :

      dR/dC = dR/dQ. dQ/dC

      = 3 . (0,4 C-3)

      = 1,2 C - 9

RUMUS DASAR TURUNAN

$$1)\ y = k \rightarrow y' = 0$$

$$2)\ y = ax^n \rightarrow y' = n.a.x^{n-1}$$

$$3)\ y = U \pm V \rightarrow y' = U' \pm V'$$

$$4)\ y = U.V \rightarrow y' = U'.V + U.V'$$

$$5)\ y = \frac{U}{V} \rightarrow y' = \frac{U'.V - U.V'}{V^2}$$

$$6)\ y = [g(x)]^n \rightarrow y' = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

$$7)\ y = f[g(x)] \rightarrow y' = f'[g(x)].g'(x)$$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dan $f'(2)$ dari fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = 4x^{11}$

b. $f(x) = 10x^3$

Jawab

a.
$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^{11} \\ f'(x) &= 4(11)x^{11-1} \\ &= 44x^{10} \\ f'(2) &= 44(2)^{10} \\ &= 44 \times 1024 \\ &= 45056 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} f(x) &= 10x^3 \\ f'(x) &= 10(3)x^{3-1} \\ &= 30x^2 \\ f'(2) &= 30(2)^2 \\ &= 30 \times 4 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dan nilai m sehingga $f'(m) = 100$ dari fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 13x + 11$

b. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 6$

Jawab

a. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 13x + 11$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(2)x^{2-1} + 13$$

$$= 3x + 13$$

$$f'(m) = 100 \rightarrow 3m + 13 = 100$$

$$3m = 87$$

$$m = 29$$

b. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 6$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$$

$$f'(m) = 100 \rightarrow 3m^2 + 4m + 5 = 100$$

$$3m^2 + 4m - 95 = 0$$

$$\frac{1}{3}(3m - 15)(3m + 19) = 0$$

$m = 5$ atau $m = -\frac{19}{3}$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dan $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 1$

b. $f(x) = x^2(3x - 2)$

c. $f(x) = (x - 1)^3$

d. $f(x) = \frac{(3x^2+5)^2}{x^2}$

Jawab

a. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 4(3)x^{3-1} + 2(2)x^{2-1} + 1 - 0$$
$$= 12x^2 + 4x + 1$$
$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 12\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1$$
$$= 6$$

b. $f(x) = x^2(3x - 2) \rightarrow f(x) = 3x^3 - 2x^2$

$$f'(x) = 3(3)x^{3-1} - 2(2)x^{2-1}$$
$$= 9x^2 - 4x$$
$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 9\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}$$

c. $f(x) = (x-1)^3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$f'(x) = (3)x^{3-1} - 3(2)x^{2-1} + 3 - 0$$

$$= 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3$$

$$= \tfrac{3}{4}$$

d. $f(x) = \frac{(3x^2+5)^2}{x^2} \rightarrow f(x) = \frac{9x^4+30x^2+25}{x^2}$

$$= 9x^2 + 30 + 25x^{-2}$$

$$f'(x) = 18x - 50x^{-3}$$

$$= 18x - \frac{50}{x^3}$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 18\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{50}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= 9 - \frac{50}{\frac{1}{8}}$$

$$= 9 - 400$$

$$= -391$$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dan $f'(3)$ dari fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = \frac{2}{x}$

b. $f(x) = \frac{1}{4x^6}$

Jawab

a. $f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow f(x) = 2x^{-1}$

$$f'(x) = 2(-1)x^{-1-1}$$
$$= -2x^{-2}$$
$$= -\frac{2}{x^2}$$
$$f'(3) = -\frac{2}{(3)^2}$$
$$= -\frac{2}{9}$$

b. $f(x) = \frac{1}{4x^6} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^{-6}$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(-6)x^{-6-1}$$
$$= -\frac{3}{2}x^{-7}$$
$$= -\frac{3}{2x^7}$$
$$f'(3) = -\frac{3}{2(3)^7}$$
$$= -\frac{1}{1458}$$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dan $f'(8)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

b. $f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}$

Jawab

a. $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow f(x) = 5x^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= -\frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{5}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$= -\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(8) = -\frac{5}{3(8)\sqrt[3]{8}}$$

$$= -\frac{5}{48}$$

b. $f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}} \rightarrow f(x) = 4x^{-\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = 4\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= -6x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{6}{x^2\sqrt{x}}$$

$$f'(8) = -\frac{6}{8^2\sqrt{8}}$$

$$= -\frac{6}{128\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{3}{128}\sqrt{2}$$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ dari fungsi-fungsi di bawah ini

a. $f(x) = 2x^3(x-2)$

b. $f(x) = (x-2)(x-3)$

c. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{3x^3}$

d. $f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{3x}$

Jawab

a. $f(x) = 2x^3(x-2) \rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^3$

$f'(x) = 8x^3 - 12x^2$

b. $f(x) = (x-2)(x-3) \rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) = 2x - 5$

c. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{3x^3} \rightarrow f(x) = \frac{x^2+4x+4}{3x^3}$

$= \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{4}{3}x^{-2} + \frac{4}{3}x^{-3}$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-2} - \frac{8}{3}x^{-3} - 4x^{-4}$

$= -\frac{1}{3x^2} - \frac{8}{3x^3} - \frac{4}{x^4}$

d. $f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{3x} \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{4}{3}x + \frac{1}{6x\sqrt{x}}$